

CAPÍTULO 3: Libros históricos de texto

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se presenta el análisis realizado de los libros históricos de texto. Dichos libros como se ha indicado en el capítulo 2 son los siguientes:

- L'Hôpital, G.F.A. (1696) *Analyse des infiniment petits*. París: L'Imprimerie Royale.
- MacLaurin, C. (1742) *Traité des fluxions*. París: Quay des Augustins
- Euler, L. (1755) *Institutiones calculi differentialis*. San Petersburgo: Academia Imperialis Scientiarum.
- Bézout, E. (1764) *Cours de Mathematiques*. París: De l'Imprimerie de Ph- D. Pierres.
- Bails, B. (1797) *Principios de matemáticas*. Madrid: Imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra
- Lagrange, J. L. (1797) *Theorie des fonctions analytiques*. París: L'Imprimerie de la Republique.
- Lacroix, S. (1837) *Traité elementaire de calcul différentiel et calcul intégral*. París: Gautier-Villars.

El desarrollo correspondiente a cada uno de los libros sigue la secuencia: **ficha de referencia de la obra** en la que se consignan los datos acerca del texto; **contextualización e intencionalidad del autor** que se ha elaborado resumiendo las aportaciones que hemos encontrado en libros acerca de la historia de la matemática, en particular: Grattan-Guinness (1984), Boyer (1986), Dhombres y otros (1986), Tikhomirov (1986), Belhoste (1991), Cajori (1993), Dunham (1993), Duran (1996), Hairer y Wanner (1996), Muñoz (1999), Wussing (1998), Dunham (2000); **caracterización de la estructura del material** elaborada a partir del estudio del manual en su conjunto; **representaciones** usadas

analizando los capítulos correspondientes a los puntos críticos y, por último, las **conclusiones**. Entre las representaciones no se han incluido las tabulares puesto que no existe en ninguno de los libros analizados representaciones de este tipo, incluso en alguno como veremos tampoco hay gráficas.

A lo largo del desarrollo del texto se va haciendo referencia a cada una de las categorías establecidas en el capítulo anterior, indicándolas entre paréntesis y en negrita, de forma que al establecer las conclusiones se puedan ir recogiendo. Los extractos literales de los libros analizados, además de presentarlos en su idioma original, se ha procurado traducirlos lo más fielmente posible. Dichos extractos se incluyen en un formato diferente del resto del cuerpo de este trabajo para resaltarlos e indicar que se reproducen literalmente. Para entender más fácilmente las descripciones se hace referencia a las figuras en las que se incluyen las gráficas que permiten visualizar dichas descripciones, indicando el número que identifica la figura con la que se corresponden.

3.1.- *Analyse des infiniment petits* de Guillaume-François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1696).

3.1.1.- Ficha de referencia de la obra.

Autor: Guillaume-François-Antoine, Marquis de L'Hôpital.

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: 1661-1704

Título: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*.

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1696, París: De l'imprimerie royale.

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1696, París: De l'imprimerie royale.

Localización del manual utilizado: Biblioteca General de la Universidad de Salamanca. Ref. 40586. (Fondos de la Librería del Colegio de la Compañía de Jesús de Salamanca).

3.1.2.- Contextualización e intencionalidad del autor.

La publicación en 1684 y 1686 por parte de Leibniz (1645-1716) de su cálculo diferencial en sendos artículos en el *Acta Eruditorum* (revista científica fundada por él mismo) no provocó demasiada conmoción en los círculos matemáticos a pesar de su contenido; los artículos eran bastante breves, tenían erratas, y en algunos lugares eran deliberadamente oscuros, con lo que no permitían un acceso fácil al nuevo cálculo, de hecho lo que resulta sorprendente es que fueran entendidos por alguien durante la década siguiente. Jacob y Jean Bernoulli estudiaron dichos artículos a partir de 1687, y en 1690, mediante artículos publicados en la misma revista *Acta Eruditorum*, demostraron haber conseguido dominar el simbolismo leibniziano y su uso. Jean Bernoulli (1667-1748), el menor de los hermanos Bernoulli, durante su estancia en París a finales del siglo XVII hacia el año 1692, instruyó al Marqués de l'Hôpital en la nueva disciplina leibniziana (CIA2). Según cuenta el propio Jean, el marqués era un buen matemático, pero en aquel momento no sabía nada sobre el recién creado cálculo diferencial. Al parecer el marqués había desarrollado un método para calcular el radio de curvatura de una curva algebraica en algunos puntos particulares, método basado en el de máximos y mínimos de Fermat, y del que el marqués estaba especialmente orgulloso. En uno de sus primeros encuentros con

Bernoulli, el marqués mostró su método a Bernoulli, quien propuso un ejemplo para comprobar la valía del método. Le llevó al marqués cerca de una hora resolver el sencillo ejemplo de Bernoulli. Para ilustrar la enorme potencia que tenía el nuevo cálculo, Jean Bernoulli le mostró cómo, en pocos minutos, se podía encontrar el radio curvatura de una curva genérica en uno cualquiera de sus puntos, y para cotejar ambos métodos propuso como ejemplo una curva que escapaba a las posibilidades del método del marqués. Jean Bernoulli explicó así la reacción de l'Hôpital:

Le produjo tanta sorpresa que desde ese momento quedó hechizado con el nuevo análisis de lo infinitamente pequeño y entusiasmado con la idea de aprenderlo de mí. (J. Fauvel y J. Gray. *The history of mathematics, a reader*. MacMillan Education and the Open University, Londres, 1987).

Bernoulli firmó con el marqués un contrato según el cual, a cambio de un salario regular, se comprometía a enviarle a l'Hôpital sus descubrimientos en matemáticas para que los utilizase según su voluntad¹:

"I shall give you with pleasure a pension of three hundred livres, which will be paid on the first half of the year, and I shall send two hundred livres for the first half of the year because of the journals that you have sent, and it will be one hundred and fifty livres for the other half of the year, and so in the future. I promise to increase this pension soon, since I know it to be very moderate and I shall do this as soon as my affairs are a little less confused... I am no son unreasonable as to ask for this all your time, but I shall ask you to give me occasionally some hours of your time to work on what I shall ask you – and also to communicate to me your discoveries, with the request not to mention them to others. I also ask you to send neither to Varignon nor to others copies of the notes that you let me have, for it would not please me if they were made public, Send me your answer to all this and believe me. Monsieur tout à vous. (le M de l'Hôpital, citado en Historical Topics for Mathematics classroom, N.C.T.M. 1969).

Uno de los resultados de este acuerdo, fue el que se haya conocido siempre como "regla de l'Hôpital" para límites indeterminados (**CIA4**), una de las contribuciones principales de Bernoulli que data de 1694. Esta regla apareció en el primer texto de cálculo diferencial que apareció impreso, el *Analyse des infiniment petits*, publicado en París en 1696 (**CIA1**). Estaba claro que para la gente con menos capacidad matemática que los Bernoulli, hubiera sido muy difícil el aprender el cálculo de los dos artículos de Leibniz. Lo que se necesitaba era un buen libro de texto que explicase el cálculo (**CIA3**); este libro fue el de l'Hôpital aunque sólo trataba el cálculo diferencial.

Este libro tuvo un gran éxito y ejerció una gran influencia que se extendió a lo largo de la mayor parte del siglo XVIII publicándose numerosas ediciones de él (**CIA3**). En el prólogo admite el autor que debe mucho a Leibniz y a los Bernoulli, especialmente "al joven profesor de Groningen" (donde Jean se había instalado en 1695). Jean Bernoulli le escribió a l'Hôpital para agradecerle que lo mencionase en su obra, pero después de la

¹ Se ha especulado durante mucho tiempo acerca de algún acuerdo que hubiera habido entre Bernoulli y l'Hôpital para la publicación de los resultados obtenidos por el primero de ellos, pero no ha sido hasta 1955 en que se publicó la correspondencia de Bernoulli cuando se ha descubierto la existencia de este contrato realizado en 1694 entre ellos.

muerte del marqués en 1704, Bernoulli, en cartas a otros colegas se dedicó a acusar al autor prácticamente de plagio. Los contemporáneos consideraron que las reclamaciones de Bernoulli no tenían fundamento, pero la publicación reciente de la correspondencia entre Bernoulli y l'Hôpital, indica que gran parte de la obra era debida evidentemente al primero, el cual no publicó su propio texto de cálculo diferencial, y el texto sobre cálculo integral apareció cincuenta años después de haber sido escrito, en sus *Opera omnia* de 1742. Por ello se suele considerar el libro de l'Hôpital como el primer libro de texto sobre cálculo diferencial o geometría diferencial en el plano y Cantoral (1995) considera que se adapta al paradigma de la *etapa de difusión del saber*, caracterizada por “una especie de pedagogía impresionista que pretende en el lector evocar una serie de impresiones que contextualicen al concepto o campo de conceptos que el texto trasmite. Esto supone de quien lo lea un ejercicio mayor que aquel que se requiere para dar seguimiento a un razonamiento lógicamente encadenado. En cierto sentido solicita del lector una especie de joroba matemática que le permite, por así decirlo, leer entre líneas” (Cantoral, *Mathesis*, vol XI, nº 1, febrero 1995). Esto podemos observarlo en las primeras definiciones incluidas en el libro:

On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement ;& au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une paraboles les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu parametre est une quantité constante² (p.1)

Se define lo que se entiende por cantidades variables y cantidades constantes pero no se explica el significado de “aumentan o disminuyen continuamente”, con lo que se supone en el lector la noción de variación continua, como señalaba anteriormente Cantoral. Muestra a continuación el significado de lo definido en relación con una parábola cuya ecuación es de la forma $y=kx^2$, indicando que considera variables las cantidades x e y y constante al parámetro k .

El libro de l'Hôpital, se basa en dos postulados: se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña (**d**):

I DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pou l'autre deux quantités qui ne different entre'elles que d'une quantité infiniment petite; ou (ce qui est la même chose) q'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une quantité itfiniment moindre, qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même³. (p.2)

y que una curva puede ser considerada como formada por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la

² Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente; y por el contrario cantidades constantes aquellas que permanecen siendo las mismas a pesar de que las otras cambien. Así en una parábola las ordenadas y las abscisas son las cantidades variables, mientras que el parámetro es una cantidad constante.

³ *Postulado I*: Postúlese que dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra; o bien (lo que es lo mismo) que una cantidad que está incrementada o disminuida solamente en una cantidad infinitamente menor, puede considerarse que permanece constante.

curvatura de la curva **(d)** (concepción estática de la curva como formada por trozos rectos de longitud infinitesimal):

II DEMANDE OU SUPPOSITION. Ou demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité des lignes droites, chacune infiniment petit ou (ce que est la même chose comme un polygone d'un nombre infini de côtes, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. (p. 3).⁴

El primer postulado establece las reglas para el manejo algebraico, extendiendo la noción usual de igualdad, mientras que el segundo, lo hace en un contexto geométrico. Estos dos principios difícilmente se podrían considerar aceptables hoy, pero l'Hôpital los veía:

“tan evidentes intrínsecamente que no dejan al lector ningún escrúpulo acerca de su verdad en la mente de un lector atento”.

El segundo postulado expresa simplemente la manera en que concebían los matemáticos de aquella época las curvas, como la traza de un punto que la recorre.

Tal como debe hacer un buen libro de texto, el *Analyse* comienza dando las definiciones de las variables y de sus diferenciales, así como postulados sobre estas diferenciales. Se obtienen las fórmulas diferenciales básicas para las funciones algebraicas a la manera de Leibniz, y se aplican al cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, curvaturas, cáusticas⁵ y límites de forma indeterminada (**CEM2**). El libro finaliza con una observación en la que se indica que los métodos utilizados son generales y se pueden extender también a curvas trascendentes, habiendo que destacar de l'Hôpital que fue un escritor excepcionalmente claro y eficaz. A partir del libro de l'Hôpital, en 1966 Abraham Robinson escribe el libro *Non-estándar análisis* en cuya introducción se dice:

“Seguidamente se introducen los diferenciales primero y sucesivos órdenes y damos aplicaciones a algunos problemas simples de geometría diferencial. Naturalmente, estos diferenciales serán infinitamente pequeños, como fueron tomados, sencillamente, en los primeros textos sobre cálculo publicados en la Europa continental, tales como el *Traité des infiniment petits de L'Hospital*.”

En el libro de l'Hôpital se tratan por primera vez de las magnitudes infinitas, ya que en el Análisis ordinario sólo se consideraban las que eran finitas (**CIA4**). Se comparan las diferencias infinitas de las magnitudes finitas, se descubren las razones entre estas diferencias y con ellas se conocen aquellas magnitudes finitas. Además este Análisis se extiende más allá del infinito, ya que sus límites no son las diferencias infinitamente pequeñas, sino que se descubren las relaciones de las diferencias de estas diferencias, alcanzando las diferencias terceras, las cuartas, etc. sin encontrar jamás el término que

⁴ “Postulado II: Supondremos que una línea curva puede ser considerada como el agregado de un número infinito de líneas infinitamente pequeñas; o (lo que es lo mismo) como un polígono con un número infinito de lados, cada uno de ellos de longitud infinitesimal, que determinan la curvatura de la línea por los ángulos entre estos lados”

⁵ Cáustica: Superficie o línea tangente a un haz de rayos emitidos desde un foco.

puede hacer finalizar el proceso. El mismo l'Hôpital, en el prólogo de su libro, considera que un Análisis de este tipo nos conduce a los verdaderos principios del estudio de las líneas curvas, ya que al considerar que son polígonos con un número infinito de lados que difieren entre ellos por el ángulo que forman esos lados infinitamente pequeños entre ellos; esto puede ayudar a determinar la curvatura de la curvas, es decir, el cálculo de tangentes, de perpendiculares, de puntos de inflexión o de retroceso, los rayos que se reflejan o aquellos que se rompen, etc (**CEM3**). Hace un pequeño recorrido histórico acerca de las contribuciones de diferentes matemáticos en distintas épocas, y así considera que las aportaciones hechas por los matemáticos clásicos fueron verdaderamente admirables, a pesar de que sus métodos no fueran generales sino que se limitaran a resolver cuestiones particulares de curvas específicas, sin seguir un cierto tipo de orden que permitiera construir un método regular y fiable. Para l'Hôpital, resultaba increíble el hecho de que los matemáticos griegos pudieran percibir algo a través de la oscuridad en la que estaban sumidos, que fueran capaces de recorrer un camino tan difícil y espinoso y que pudieran resolver los problemas con los que se enfrentaban. En relación con este tipo de situaciones menciona el caso de Arquímedes y su estudio de la espiral, y el hecho de que lo que ellos legaron contribuyó a que en el tiempo de l'Hôpital se pudieran construir los conocimientos relativos al Análisis. Pero considera raro el hecho de que después de esta primera época, no se llevará a cabo ninguna otra contribución digna de ser tomada en cuenta. Parece que los matemáticos se dedicaron a realizar traducciones y comentarios de los libros de los clásicos sin que hubiera ningún avance en el Análisis. Destaca las contribuciones de Descartes que partió de la resolución de un problema de Pappus, reunió los métodos del Análisis y de la Geometría, resolvió con este método numerosos problemas que hasta entonces se habían mantenido irresolubles, pero dicho método supuso también un límite en relación con el tipo de problemas que se podían resolver, ya que se aplicó a la resolución de determinadas igualdades pero no permitió resolver problemas relativos a tangentes. También menciona la contribución de Pascal que se centraba más en el estudio de la propia curva, lo que le permitía investigar su longitud, el espacio que encerraban, el volumen que escribían, el estudio de los centros de gravedad de unas y otras, etc. Consideraba elementos infinitamente pequeños y descubrió sus Métodos generales sorprendentemente usando sólo la cabeza y sin Análisis. En cuanto a M. Barrow, considera reseñable el uso de⁶:

Un petit triangle fait de une particular courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correspondantes; & ce triangle est femblable a celuy qui se doit former de la tangente, le l'appliquée, & de la soutangente⁷: de forte que part une simple Analogie cette derniere méthode épargne tout calcul. (p. IV)⁸

⁶ Se trata del denominado triángulo característico.

⁷ Subtangente es el segmento que resulta de la proyección sobre el eje de abscisas, del segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia y la intersección con el eje de abscisas. Normal a una curva en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente a esa curva en dicho punto. Subnormal es el segmento comprendido entre la abscisa del punto y la intersección de la normal con el eje de abscisas.

⁸ Un pequeño triángulo hecho de una curva particular, comprendido entre dos ordenadas infinitamente cercanas, la diferencia entre estas dos ordenadas y la de las correspondientes abscisas, y este triángulo es semejante al formado por la tangente, la ordenada y la subtangente: de forma que a partir de una simple analogía este último método ahorra muchos cálculos.

Por último, de Leibniz resalta que hasta entonces su método que había sido prácticamente desconocido, fue descubierto por los hermanos Bernoulli y que las aplicaciones de este nuevo cálculo son inmensas, sirviendo tanto para curvas mecánicas como geométricas:

Il convient aux Courbes mécaniques⁹, comme aux géométriques; les lignes radicales luy font indifferens, & même souvent commodes; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra; la comparaison des infiniment petits de tous les genres luy est également facile. Et de là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux Tangentes tant courbes que droites, aux questions De maximis et minimis, aux points d'inflexion & rebroussement des courbes, aux Developpées¹⁰, aux Caustiques par réflexion ou par réfraction, &c.¹¹

El concepto que tiene l'Hôpital de la diferencial es un poco diferentes del de Leibniz. Las diferenciales de Leibniz son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable; l'Hôpital, en cambio, no considera las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo o decreciendo de manera continua, y entonces las diferencias son las partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen (**d**).

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque AMB qui ait pour axe ou diametre la ligne AC, & pour une de ses appliquées la droite PM; & soit une autre appliquée pm infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene MR parallele à AC; les cordes AM, Am & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS; Pp sera la différence de AP, Rm celle de PM, Sm celle de AM, & Mm celle de l'arc AM. De même le petit triangle Mam qui a pour base l'arc Mm, sera la différence du segment AM; & le petit espace MPpm, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.¹² (p. 2)

⁹ Descartes en su *Géométrie* clasifica las curvas según su representación simbólica, de forma que aquellas de las que se conoce su ecuación se clasifican según el grado de dicha ecuación, siempre que la ecuación sea de la forma $P(x,y)=0$ siendo P un polinomio. Dichas curvas son denominadas curvas geométricas mientras que las demás se denominan curvas mecánicas.

¹⁰ Envolvante de una familia de curvas es una curva que en cada punto es tangente a una de las curvas de la familia. Evoluta de una curva es el conjunto de los centros de curvatura de la curva principal. Envolvente de una curva plana γ es la curva γ' para la cual γ es la evoluta.

¹¹ Ataño tanto a curvas mecánicas como a las geométricas; las líneas radicales le son indiferentes y muchas veces cómodas; entiende de las indeterminaciones que encontremos; la comparación de los infinitamente pequeños de cualquier género le es igualmente fácil: Y el nacimiento de una infinidad de descubrimientos en relación con las tangentes tanto a las líneas curvas como a las rectas, a las cuestiones de máximos y mínimos, a los puntos de inflexión y de retroceso de las curvas, a las envolventes, a las caústicas por reflexión o por refracción, etc.

¹² La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente, es llamada *Diferencia*. Sea por ejemplo una línea curva cualquiera AMB que tiene por eje o diámetro la línea AC y por una de sus ordenadas la recta PM; y sea pm otra ordenada infinitamente próxima a la primera. Admitido esto si tomamos MR paralela a AC, las cuerdas AM. Am y la que describe con centro en A y radio AM, el pequeño arco de círculo MS, entonces Pp será la diferencia de AP; Rm la de PM; Sm la de AM y Mm la del arco AM. De la misma forma el triángulo pequeño Mam que tiene por base el arco Mm, sera la

En esta época de nacimiento, el Análisis consistía en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas, y los conceptos principales que se manejaban eran **cantidades geométricas variables (CEM3)** tal como aparecían en los problemas. Con el paso del tiempo a medida que se fueron haciendo más complicados los problemas y el manejo de las fórmulas más intrincado, el origen geométrico de las fórmulas se fue haciendo más remoto, y así el cálculo fue cambiando hasta convertirse en una disciplina que se ocupaba simplemente de las fórmulas con lo que se fue algebraizando. Es importante además, hacer notar que es el estudio de esas diferencias tanto infinitamente grandes como infinitamente pequeñas, de lo que va a tratar esta rama de las Matemáticas, de ahí el nombre de Cálculo Diferencial.

3.1.3.- Caracterización de la estructura de la obra.

La obra tiene 181 páginas y se divide en diez secciones (**CEM1**). La primera contiene los principios del cálculo de diferencias. La segunda nos hace ver de qué manera nos debemos servir para calcular las tangentes de cualquier tipo de curva de cualquier número de indeterminadas que tenga la ecuación. La tercera trata de resolver todas las cuestiones relativas a máximos y mínimos. La cuarta cómo calcular los puntos de inflexión y de retroceso. La quinta descubre el uso de la envolvente de M. Hugens para todo tipo de curvas. La sexta y la séptima hacen ver cómo obtener cáusticas tanto por reflexión como por refracción. La octava nos ilustra sobre cómo calcular los puntos de las líneas curvas que tocan una infinidad de líneas dadas de posición, rectas o curvas. La novena la solución de algunos problemas que dependen de resultados precedentes y la décima consiste en una nueva forma de utilizar el cálculo de diferencias para curvas geométricas, que se basa en el método de Descartes y Hudde pero que ellos solo utilizaron para cierto tipo de curvas (**CEM2, CEM3**).

En las secciones de la dos a la ocho hay un número muy pequeño de proposiciones, pero son muy generales, porque para él los libros que contienen sólo proposiciones particulares no tienen ningún valor y su lectura sólo

“faire perdre du temps à ceux qui les font”.¹³ (p.ij)

En la sección nueve incluye algunos problemas que le parece que son

“curieux, & qu’ils font très-universeles”¹⁴. (p. Ij)

Añade él mismo en el prólogo, que le hubiera gustado añadir una sección sobre el maravilloso uso que tiene el cálculo de diferencias en la física, la precisión que podemos lograr, cuánta mecánica podemos retirar de la utilidad, pero una enfermedad se lo impidió. Compara su libro con otro publicado al mismo tiempo de M. Nieuwentiit titulado Análisis infinitorum, pero considera que hay muchas diferencias entre los dos ya que no utiliza la

diferencia del segmento AM; y el pequeño espacio MPpm, la del espacio comprendido entre las rectas AP, PM y por el arco AM.

¹³ Hacen perder el tiempo a aquéllos que las hacen.

¹⁴ Curiosos y muy universales

característica de Leibniz, niega las diferencias segundas, terceras, etc. Al estudio de las magnitudes, sus diferencias infinitamente pequeñas y la comparación de estas diferencias lo denomina l'Hôpital, Cálculo diferencial, por el contrario el Cálculo Integral consiste en acumular estas diferencias pequeñas para conseguir la magnitud.

El libro está escrito en francés. Cada una de las secciones está encabezada por una ilustración en la que se mezclan cuestiones mundanas (la guerra, ángeles) con dibujos o instrumentos propios de las matemáticas (curvas, semicírculos, reglas, mapas, esferas terrestres,...). La sección viene numerada en letra mayúscula y titulada en cursiva. Los elementos de los que esta compuesto cada sección aparecen centrados con letras mayúsculas y numerados (DEFINITION, COROLLAIRE, PROPOSITION, ADVERTISEMENT, REGLE, EXEMPLES,...). La primera letra del desarrollo de la sección aparece en un cuadrado que ocupa seis líneas en el que aparece dicha letra junto con una ilustración. Los conceptos cuando se definen están escritos en letra cursiva (CEM4).

El libro contiene unas hojas desplegadas del tamaño de página y media con las gráficas numeradas. La zona de las gráficas está enmarcada con una línea doble siendo la de fuera más gruesa. La parte más interior de dichas hojas está en blanco de forma que se pueden leer las páginas anteriores en las que se hace referencia a dichas gráficas manteniendo la hoja en la que están dibujadas desplegada (CEM4).

3.1.4.- Representaciones.

Se presenta a continuación una breve descripción de cada una de las representaciones utilizadas en este libro en relación con los puntos críticos clasificadas en tres grupos: descripciones, gráficas y expresiones simbólicas. En cuanto a las representaciones tabulares no hay ningún apartado que se ocupe de ellas, puesto que l'Hôpital no las utilizó.

3.1.4.1.-Descripciones.

Dentro de este apartado vamos a considerar, tanto las definiciones y enunciados de tipo teórico que caracterizan desde un punto de vista estrictamente matemático los conceptos que estamos estudiando, como las aplicaciones, ejercicios y problemas que se pueden resolver manejando dichos conceptos. Primeramente exponemos las descripciones de tipo teórico, puesto que esto nos va a dar la visión que tenía l'Hôpital acerca del Análisis Matemático. Posteriormente iremos tratando los problemas expuestos y resueltos en el texto. Los contenidos se aplican a problemas de diferente tipo, aunque en ellos sólo se consideran situaciones simples e ideales, renunciando, por ejemplo, a considerar el rozamiento, las propiedades de los materiales, etc. por lo que no se pueden considerar como problemas auténticamente reales. A ello hay que añadir el efecto derivado de los medios de producción que en aquella época deben considerarse como todavía feudales, con lo que el abismo entre la práctica artesanal y las técnicas preconizadas por la ciencia era cada vez mayor. De esta manera coexistía una ingeniería desarrollada sobre una base empírico-artesanal, y por otra, una matemática pulida y académica, es decir, cultivada sobre todo en las academias. Sólo a finales del siglo XVIII la consolidación de la Revolución Industrial y

la incipiente transformación de la ciencia en una fuerza productiva pudo favorecer el encuentro de la matemática y la técnica (Wussing, 1998).

A) Definiciones de máximos y mínimos.

La definición que se ofrece de puntos máximos y mínimos es la que se expone a continuación:

Soit une ligne courbe MDM dont les appliquées PM, ED, PM soient parallèles entr'elles, & qui soit telle que la coupée AP croissent continuellement, l'appliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminue; ou au contraire qu'elle diminue jusqu'à un certain point E, après lequel elle croisse. Cela posé, La ligne ED sera nommée *La plus grande*, ou *la moindre* appliquée.¹⁵ (p. 41) (figs. 3.4)

Dicha definición se da a partir de la construcción de una curva, y en ella se observa la concepción de l'Hôpital acerca de dicha construcción, como ordenadas que crecen o decrecen continuamente en función de las abscisas, con lo que la definición de las ordenada máxima y mínima tiene un carácter fundamentalmente **geométrico-dinámico (d)**. Recordemos que l'Hôpital no maneja la noción de función, sino que el concepto sobre el que construye su Análisis, es el de variable, por ello su definición se hace a partir de una curva genérica MDM (recordemos la definición que ofrece l'Hôpital de variable que está recogida en la página 131). La construcción de dicha curva es la utilizada por Descartes en su *Geometrie* incluida en su *Discurso del método* (1637), es decir, a partir de una línea recta vertical tanto para Descartes como para l'Hôpital (aunque nosotros actualmente la representamos horizontalmente), que actúa de eje sobre el que varían las indeterminadas (coupées para l'Hôpital y abscisas para nosotros), se levantan líneas perpendiculares que corresponden a las llamadas aplicadas¹⁶ (ordenadas en la nomenclatura actual). La notación relativa a la curva recuerda la utilizada para nombrar objetos geométricos como ángulos o polígonos indicando ciertos puntos notables (vértices) que determinan la figura en cuestión, en este caso los puntos MDM son puntos de la curva de forma que mientras M identifica un punto genérico y por eso mismo se repite, D hace referencia a un punto particular, en este caso el que corresponde a la aplicada máxima o mínima. De forma similar, las abscisas se consideran pertenecientes a una recta AP, de forma que A es el origen, P es una abscisa genérica y E es la correspondiente al máximo o mínimo. Debemos resaltar la noción de aplicada como una línea y no como una coordenada como entendemos actualmente, de esta forma, a medida que la aplicada varía sobre la curva, recorre el área que hay bajo ella. La definición que se propone de máximo y mínimo, es una definición basada en la descripción del comportamiento de la curva en un entorno del punto, que sugiere la noción de máximo relativo, a pesar de que las consideraciones que se hacen no son locales sino globales. A

¹⁵ Sea una línea curva MDM en la que las aplicadas PM, ED, PM sean paralelas entre ellas y tal que la abscisa AP crece continuamente, la aplicada PM crece hasta un cierto punto E, después del cual disminuye, o al contrario disminuye hasta un cierto punto E, después del cual crece. En esta situación, La línea ED será llamada *La más grande* o *la menor* aplicada.

¹⁶ Descartes los denomina *appliquées par ordre* o, en versión latinizada *omnes applicatae* (todos añadidos por orden) o abreviadamente *applicatae*. Así surgieron las palabras con igual significado *applicatae* y *ordinate* respectivamente. La primera cayó después en desuso. A partir de esta idea se acuñó en el siglo XVII la palabra *abscissae* (del latín *abscindere*, derivado de *scindere*, escindir, cortar)

continuación se da otra definición, en la que se plantea el interés que puede tener el tema en relación con un cierto tipo de problemas que se pueden resolver con métodos adecuados, y que son los relativos a máximos y mínimos.

Si l'on propose une quantité telle que PM, qui soit composée d'une ou de plusieurs indetermines telles que AP, laquelle AP croissent continuellement, cette quantité PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminuë, ou au contraire; & qu'il faille trouver pour AP, une valeur AE telle que la quantité ED qui en est composée, soit plus grande ou moindre que toute autre quantité PM semblablement formée de AP. Cela s'appelle une question *De maximis & minimis*.¹⁷ (p. 41)

B) Método de cálculo de máximos y mínimos.

Seguidamente se establece el método adecuado para la resolución de estos problemas a través de la demostración de una proposición general que indica en qué consisten este tipo de problemas:

La nature de la ligne courbe MDM étant donnée; trouver pour AP une valeur AE telle que l'appliquée ED soit la plus grande ou la moindre de ses semblables PM¹⁸. (p. 41)

La demostración es de tipo descriptivo y se basa en la utilización de otros resultados establecidos anteriormente en el texto. La conclusión a la que se llega es que:

D'où il suit que la difference¹⁹ d'une quantité qui exprime un plus grande ou un moindre, doit étre égale d'abord à zero ou à l'infini²⁰. p. 42

Se establece así, la forma de cálculo de los puntos en cuestión sin indicar si este método sirve tanto para funciones derivables como para las que no lo son, puesto que en aquél momento no tenía sentido esta distinción. Hay que calcular los puntos en los que la **diferencia** de l'Hôpital es cero y en los que la tangente será horizontal o, aquéllos en los que dicha diferencia sea infinita y, por lo tanto, la tangente será vertical. Este resultado se obtiene a partir de un razonamiento en el que se considera que cuando la variable aumenta la **diferencia** es positiva (crecimiento de la función), mientras que si disminuye, la **diferencia** será negativa (decrecimiento de la función) y para que la diferencia pase de positiva a negativa o viceversa la variable tiene dos posibilidades: que en ese momento sea cero o infinito²¹. Esta distinción no se establece en los libros de texto actuales en los que

¹⁷ Si tenemos una cantidad como PM, que esté formada a partir de una o de varias indeterminadas como AP, tales que cuando AP crece continuamente, esta cantidad PM crece también hasta un cierto punto E, después del cual disminuye, o al contrario; y que tenemos que encontrar para AP, un valor AE tal que la cantidad ED que depende de ella, sea la más grande o la más pequeña que cualquier otra cantidad PM formada de manera semejante a partir de AP. Esta cuestión se denomina de *máximos y mínimos*.

¹⁸ Dada la naturaleza de una línea curva, encontrar para AP un valor AE tal que la ordenada ED sea la más grande o la más pequeña de las semejantes PM.

¹⁹ La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminuë continuellement, es est appellée la *Différence*. p. 2. (La porción infinitamente pequeña en la que una cantidad aumenta o disminuye continuamente se llama diferencia)

²⁰ Luego la diferencia de una cantidad que expresa un máximo o un mínimo, debe ser igual a cero o a infinito.

²¹ El argumento que se está utilizando y que será una constante a lo largo de este libro, es eminentemente geométrico-dinámico

este criterio vale sólo para funciones que son derivables y por lo tanto los alumnos no poseen la noción de que la derivada pueda ser en esos puntos infinita. Otra de las nociones utilizadas por l'Hôpital en relación con los máximos y mínimos es la de subtangente, que actualmente también está en desuso, la variación que sufre esta subtangente a medida que la abscisa se aproxima al máximo o al mínimo, se puede utilizar también como indicador de los puntos en cuestión **(d)**. De esta forma, cuando la variable se acerca por la izquierda al máximo o mínimo, la subtangente aumenta hasta alcanzar infinito en dicho punto y posteriormente disminuye. En ningún momento se establece un criterio para distinguir los máximos de los mínimos como el que se utiliza ahora con la derivada segunda.

C) Definiciones de puntos de inflexión y de retroceso.

En cuanto a los puntos de inflexión, primeramente establece la noción de diferencia según diferentes órdenes:

DÉFINITION I

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement est appelée la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien la *différence seconde*. ...

... la différence de la différence seconde, ou bien la différence troisième...²²(p. 55)

A continuación pasa a definir los puntos de inflexión y los puntos de retroceso:

DÉFINITION II

Lorsqu'une ligne courbe AFK est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe V ; le point F qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appelé point d'*inflexion*, lorsque la courbe étant parvenue en F continue son chemin vers le même côté : & point de *rebroussement* lorsqu'elle rebrousse chemin du côté de son origine²³. (p. 59) (figs. 3.6)

Pasa a establecer el problema que va a permitir calcular los puntos de inflexión y los puntos de retroceso, igual que hizo con los máximos y mínimos, en los siguientes términos:

La nature de la ligne courbe AFK étant donnée, déterminer le point d'*inflexion* ou de *rebroussement* F.²⁴ (L'Hôpital, p. 60)

²² La porción infinitamente pequeña en la que la diferencia de una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente se llama la diferencia de la diferencia de esta cantidad, o bien la diferencia segunda....

...la diferencia de la diferencia segunda, o bien la diferencia tercera.

²³ Cuando una línea curva AFK es en parte cóncava y en parte convexa hacia una línea recta AB o hacia un punto fijo V; el punto F que separa la parte cóncava de la convexa y en consecuencia es el fin de una y el comienzo de la otra, se llama punto de inflexión, cuando la curva al llegar a F continua su camino hacia el mismo lado; & punto de retroceso cuando retrocede el camino hacia el lado de su origen.

²⁴ Dada la naturaleza de una línea curva AFK, determinar el punto de inflexión o el punto de retroceso F.

D) Método de cálculo de puntos de inflexión y de retroceso.

Apoyándose en representaciones gráficas deduce cuándo se puede asegurar que un punto es un punto de inflexión o de retroceso. Para ello se distinguen dos casos:

- cuando la curva tiene como diámetro la línea recta AB (nuestro eje de abscisas), de forma que las ordenadas PM son segmentos perpendiculares a dicho diámetro (la curva está construida a partir de un eje de coordenadas) y
- cuando la curva tiene como ordenadas segmentos de la forma BM que parten todos de un mismo punto B (la curva está construida a partir de un único punto o centro).

En el primero de los casos, para deducir la regla que permita identificar los puntos en cuestión razona sobre la subtangente AT, considerando que a medida que la abscisa se va acercando al punto de inflexión, dicha subtangente $AT = \frac{ydx}{dy} - x$ va aumentando y cuando sobrepasa dicho punto va disminuyendo. Por lo tanto, dicha subtangente alcanza un máximo en el punto de inflexión y su diferencial $\frac{dy^2 dx - y dx ddy}{dy^2} - dx$ ha de ser cero o infinito, de lo que se obtiene operando algebraicamente sobre la fórmula anterior que $-\frac{y ddy}{dy^2} = 0$ o infinito, es decir, $ddy = 0$ o infinito, que es la fórmula general para encontrar los puntos de inflexión o de retroceso para l'Hôpital. Otra forma de encontrar esta fórmula consiste en razonar sobre la variación de ddy en torno al punto en cuestión que debe pasar de positiva a negativa o viceversa, por lo que en dicho punto la diferencia segunda ha de ser nula o infinito.

Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx ; & prenant la différence de cette valeur, en supposant dx constante, on trouvera une valeur de ddy en dx^2 , la quelle étant égale d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira dans l'une ou l'autre de ces suppositions à trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF aille couper la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebroussement F²⁵. (pp. 60-61)

Igualmente se deduce la regla cuando la curva se construye a partir de un único punto B para la que se obtiene como fórmula que $dx^2 + dy^2 - y ddy$ debe ser igual a cero o a infinito

Or la nature de la ligne AFK étant donnée, l'on aura des valeurs de dy en dx & de ddy en dx^2 , lesquelles étant substituées dans $dx^2 + dy^2 - y ddy$, formeront une quantité, qui étant égale d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à trouver pour BF une valeur telle que

²⁵ Si está dada la naturaleza de la curva, tendremos un valor de dy en dx ; y por tanto la diferencia de este valor, suponiendo dx constante, dará un valor de ddy en dx^2 , que igualada a cero o a infinito, servirá para encontrar para AE un valor tal de la aplicada EF corte a la curva AFK en un punto de inflexión o de retroceso F.

décrivait du centre B, & de ce rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebroussement F²⁶. (p. 62)

E) Problemas expresados en forma algebraica.

En primer lugar consideramos los casos en los que se da una curva expresada de forma algebraica a la que simplemente hay que aplicar el criterio mencionado anteriormente para el cálculo de máximos y mínimos como simple ejercitación **(d)**. Son ejemplos en los que se demuestra la potencia del método usado, frente a otros anteriores en los que los cálculos eran muy enrevesados, incluso para curvas que en aquella época eran consideradas ciertamente complicadas. La mayoría de las curvas consideradas son las clásicas obtenidas principalmente a partir de fenómenos físicos, a continuación incluimos algunos de estos ejercicios.

EXEMPLE 1.

Supposons que $x^3+y^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, $AB=a$) exprime la nature de la courbe MDM²⁷ (p. 42) (fig. 35)

EXEMPLE II.

Soit $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM²⁸ (p. 43)

La primera de las curvas es el llamado **Folium de Descartes**, una curva algebraica de tercer grado que aparece por primera vez en 1638 en la correspondencia que mantiene Descartes con Mersenne con el fin de poner en evidencia el método de Fermat para calcular los puntos extremos de una curva algebraica. La curva tiene un punto doble en el origen, una asíntota de ecuación $x+y=-(a/3)$, un punto máximo para $x=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ y un punto con tangente vertical en $x=\frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$. Tanto Descartes como l'Hôpital sólo consideran el bucle en el que las coordenadas son positivas. Actualmente no se puede considerar como función

aunque se puede realizar su estudio en coordenadas paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{at}{1+t^3} \\ y = \frac{at^2}{1+t^3} \end{array} \right\}$$

²⁶ Si la naturaleza de la curva AFK está dada, tendremos los valores de dy en dx y de ddy en dx^2 , los cuáles substituidos en dx^2+dy^2-yddy formarán una cantidad que igualada luego a cero y a infinito, servirá para encontrar para BF un valor tal que describiendo desde el centro B y su radio un círculo cortará a la curva AFK en un punto de inflexión o de retroceso F.

²⁷ Supongamos que $x^3+y^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, $AB=a$) expresa la naturaleza de la curva MDM.

²⁸ Sea $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}}$ la ecuación de la naturaleza de la curva MDM

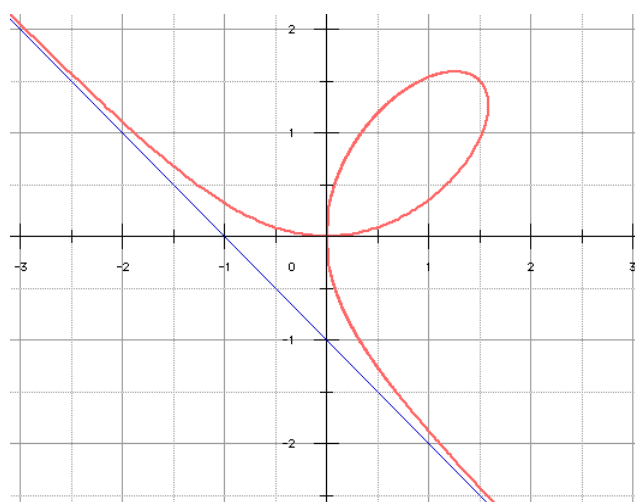


Fig. 3.1. Folium de Descartes

La segunda función está relacionada con la **Parábola semicúbica de Neile** (de hecho es una trasladada de la curva $y^3=ax^2$) descubierta por William Neile en 1657 y que fue la primera curva algebraica de la que se calculó su longitud de arco. En 1687 Leibniz propuso buscar una curva a lo largo de la cual una partícula que desciende bajo la gravedad recorra distancias verticales iguales en tiempos iguales, siendo Huygens el que mostró que la parábola semicúbica satisfacía dicha propiedad, por lo que es una curva isocrona. Esta curva representa el caso típico de una función que no es derivable en el punto mínimo en el que tiene una tangente vertical, por lo que la diferencia hay que igualarla a infinito.

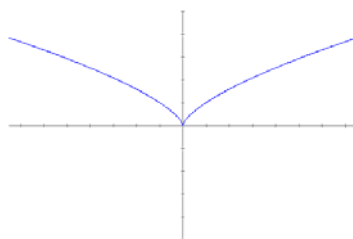


Fig. 3.2 Parábola Semicúbica de Neile.

En cuanto a los ejemplos expuestos en relación con los puntos de inflexión y de retroceso dentro de este mismo grupo, tenemos el siguiente ejemplo:

EXEMPLE I

Soit une ligne courbe AFK qui ait pour diametre la ligne droite AB, & qui soit telle que la relation de la coupée AE (x) à l'appliquée EF (y), soit exprimée par l'équation $axx=xy+aay$. Il s'agit de trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF rencontre la courbe AFK au point d'inflexion F²⁹. (p. 63) (fig. 3.9)

Se considera la curva restringida sólo al primer cuadrante y por lo tanto se obtiene un único punto de inflexión, igualando la segunda diferencial a cero, con coordenadas $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}, y = \frac{1}{4}a$ (teniendo en realidad otro punto de inflexión simétrico respecto del obtenido respecto del eje de ordenadas).

EXEMPLE II

Soit $y - a = \frac{x - a^{\frac{3}{5}}}{x - a^{\frac{3}{5}}}$ (p. 64)

Para obtener los puntos de inflexión de esta curva hay que igualar la segunda diferencial a infinito, es decir, el denominador igualarlo a cero puesto que el numerador es una constante. La tangente en el punto buscado es por lo tanto vertical y el punto tiene como abcisa $x=a$.

F) Descripción geométrica de curvas

En este siguiente grupo se incluyen los ejemplos en los que se presenta la descripción geométrica (**d**) de la construcción de una curva pero, para la que no se da su representación algebraica.

EXEMPLE III.

Soit une demiroulette acourcie AMF, dont la base BF est moindre que la demicirconférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E sur le diametre AB, en sorte que l'appliquée ED soit la plus grande qu'il est possible³⁰. (p. 43) (fig. 3.12)

La curva que se esconde bajo el nombre francés de **roulette** es la cicloide que Pascal denominaba **trocoide** (del griego trechein=girar) curva descrita por un punto M de

²⁹ Sea una línea curva AFK que tiene por diámetro la línea recta AB y que es tal que la relación de la abscisa AE (x) con la ordenada EF (y) venga expresada por la ecuación $axx=xy+aay$. Se pide encontrar para AE un valor tal que la aplicada EF encuentre a la curva AFK en un punto de inflexión F.

³⁰ Sea una semiruedecilla AMF en la que la base BF es menor que la semicircunferencia ANB del círculo generador que tiene por centro el punto C. Determinar el punto E del diámetro AB, de forma que la aplicada ED se la más grande posible.

un círculo que rueda sin deslizarse sobre una recta³¹. Dicho nombre se utiliza también en general para nombrar las **epitrocoides** (o epicicloides) y las **hipotrocoides** (o hipocicloides). Las primeras se generan a partir de un punto M de un círculo que rueda sin deslizarse por el exterior de otro círculo, y las segundas cuando rueda por el interior del círculo.

Y para los puntos de inflexión, se tiene de forma similar:

EXEMPLE III

Soit une demi-roulette allongée AFK don't la base BK surpasse la demi.circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il s'agit de déterminer sur le diamètre AB le point E, en sorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'inflexion F. (pp. 64-65) (fig. 59)

El punto de inflexión se obtiene $x = \frac{ac}{b}$, siendo a la longitud de la semicircunferencia, c el radio del círculo y b la longitud de la recta BK.

EXEMPLE IV

On demande le point d'inflexion F de la Conchoïde AFK de *Nicomede*, laquelle a pour pole le point P, & pour asymptote la droite BC. Sa propriété est telle qu'ayant mené du pole P à de ses points quelconques F la droite PF, qui rencontre l'asymptote BC en D ; la partie DF est toujours égale à une même droite donnée a³² (p. 65) (fig. 3.10)

La conchoide fue utilizada por primera vez en el siglo II antes de Cristo por Nicómedes para resolver el problema clásico de los griegos relativo a la trisección del ángulo, proviene de la palabra griega relativa a una concha. Fue una de las curvas favoritas de los matemáticos del siglo XVII en relación con la Geometría Analítica y el Análisis, y en todos los problemas relativos a cúbicas y cuárticas. Su construcción, como se indica en el mismo enunciado del problema, es la siguiente:

- 1.- Dada una línea recta l, un punto exterior a ella O y una distancia a.
- 2.- Se dibuja una recta que pase por O y corte a la recta en un punto P.
- 3.- Se marcan dos puntos Q₁ y Q₂ tales que d(Q₁, P)=d(Q₂,P)=a
- 4.- El lugar de los puntos Q₁ y Q₂ cuando P varía en la recta l, es la conchoide.

El punto O se llama polo, la recta l directriz, siendo una asíntota a la curva. Las ecuaciones de la curva son:

³¹ En el primer capítulo se encuentra una gráfica de dicha función.

³² Pedimos el punto de inflexión F de la conchoide AFK de Nicomedes, que tiene por polo el punto P, y por asíntota la recta BC. Su propiedad es tal que habiendo llevado el polo P a uno de sus puntos cualquiera F la recta PF, que encuentra la asíntota BC en D; la parte DF es si pre igual a una misma recta dada a.

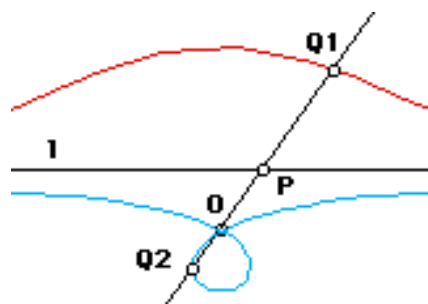


Fig. 3.3 Concoide de Nicómedes

a) En coordenadas polares:

$$\rho = \frac{b}{\sin(\theta)} + k \text{ con } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

b) En coordenadas paramétricas:

$$\begin{cases} x = t + \frac{at}{\sqrt{b^2 + t^2}} \\ y = b + \frac{ba}{\sqrt{b^2 + t^2}} \end{cases} \text{ para } -\infty \leq t \leq \infty$$

c) En coordenadas cartesianas $(x^2 + y^2)(y - b)^2 = k^2 y^2$.

Otros ejemplos en los que se encuentran situaciones similares a las anteriores, todos ellos relacionados con los puntos de inflexión y de retroceso, son los siguientes:

EXEMPLE V

Soit une autre espece de Conchoïde AFK, telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques F au pole P la droite PF qui coupe l'asymptote BC en D, le rectangle PD×DF soit toujours égal au même rectangle PB×BA. On demande le point d'inflexion F.³³ (p. 67)

EXEMPLE VI

Soit un cercle AED qui ait pour centre le point B, avec une ligne courbe AFK telle qu'ayant mené à discrétion le rayon BFE, le carré de FE soit égal au rectangle de l'arc AE par une droite donnée b. Il faut déterminer dans cette courbe le point d'inflexion F.³⁴ (p. 68)

³³ Sea otra especie de Concoide AFK, tal que habiendo escogido uno de sus puntos cualquiera F y el polo P, la recta PF que corta a la asíntota BC en D, el rectángulo PD×DF sea siempre igual al rectángulo PbxBA. Pedimos el punto de inflexión F.

³⁴ Sea un círculo AED que tiene por centro el punto B, con una línea curva AFK tal que habiendo escogido a discreción el radio BFE, el cuadrado de FE sea igual al rectángulo del arco AE por una recta dada b. Se va a determinar en esta curva el punto de inflexión.

El ejemplo anterior está relacionado con la espiral logarítmica.

EXEMPLE VII

Soit une ligne courbe AFK qui ait pour axe la droite AB, dont la propriété soit telle qu'ayant mené une tangente quelconque FB qui rencontre AB au point V la partie interceptée AB soit toujours à la tangente BF en raison donnée de m à n . Il est question de déterminer le point de rebroussement F. (p. 69)

G) Problemas aritméticos.

Los dos ejemplos siguientes, plantean sendas situaciones geométricas que podemos considerar los antecedentes de los que hemos clasificado en los libros de texto actuales como problemas aritméticos, en los que a partir de un número que se divide en dos cantidades, se crea otra cantidad formada a partir de las divisiones, de forma que hay que encontrar un máximo o un mínimo para esta última cantidad. En este caso, como se ha dicho ya, la situación planteada está relacionada con un contexto geométrico (**d**) en el que lo que se divide no es una cantidad sino una línea.

EXEMPLE IV

Couper la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du carré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même manière³⁵. (p.44).

En este problema la longitud de una línea a , hay que dividirla en dos partes x y $a-x$, de forma que $x^2(a-x)$ sea un máximo. En lugar de resolver esta situación, se generaliza para el caso en que tengamos $x^m(a-x)^n$, obteniéndose como abscisa del máximo $x = \frac{m}{m+n}a$. A continuación se interpreta, tanto la situación planteada como el resultado obtenido en diferentes casos particulares, siendo en algunos de ellos uno de los exponentes negativos, en cuyo caso la línea de partida hay que prolongarla a partir de los extremos de partida.

EXEMPLE V

La ligne droite AB étant divisée en trois parties AC, CF, FB, il faut sa partir du milieu CF au point E, en sorte que le rapport du rectangle AE×EB au rectangle CE×EF soit moindre que tout autre rapport formé de la même manière³⁶. p. 45.

En este caso, se parte de tres cantidades fijas $AC=a$, $CF=b$ y $CB=c$ y hay que encontrar $CE=x$ de forma que $\frac{(a+x)(c-x)}{x(b-x)}$ sea mínimo. Se enfatiza el carácter geométrico

³⁵ Cortar la línea AB dada en un punto e, de forma que el producto del cuadrado de una de sus partes AE por la otra EB, sea el mayor posible de todos los productos formados de la misma manera.

³⁶ La línea recta AB está dividida en tres partes AC, CF, FB, cortar la parte del medio CF en un punto E, de forma que la razón del rectángulo AE×EB con el rectángulo CE×EF sea menor que cualquier otra razón formada de la misma manera.

de la situación haciendo referencia a los rectángulos formados a partir de ciertas longitudes, es decir, el producto de dos cantidades hace referencia tanto al área de dichos rectángulos como a las longitudes de los lados que lo delimitan. Se identifica un producto de dos longitudes con la magnitud de un rectángulo tal como hacen los clásicos a partir de Pitágoras.

h) Problemas de geometría espacial.

Los tres problemas siguientes plantean situaciones de geometría tridimensional para los que las figuras escogidas se van a repetir sucesivamente en, prácticamente, todos los libros analizados: el cono y el paralelepípedo.

EXEMPLE VI. Entre tous les Cones qui peuvent éter inscrits dans une sphère, déterminer celui qui a la plus grande surface convexe³⁷. (p. 46) (fig. 40)

EXEMPLE VII. On demande entre tous les Parallélépipèdes égaux à un cube donné a^3 , & qui ont pour un de leurs côtes la droite donnée b , celui qui a la moindre superficie³⁸, (p. 46)

EXEMPLE VIII. On demande presentement entre tous les Parallélépipèdes qui sont égaux à un cube donné a^3 , celui qui a la moindre superficie³⁹, (p. 47)

El primero de ellos utiliza como cuerpo geométrico el cono, considerado como un cuerpo de revolución engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos. Dicho cono está inscrito en una esfera, considerada igualmente como cuerpo de revolución engendrado por un semicírculo que gira alrededor de su diámetro. El máximo que hay que calcular se refiere a la superficie del cono en lugar del volumen que es lo más habitual en los manuales escolares usuales. Como ambas figuras son consideradas cuerpos de revolución la discusión se realiza utilizando las figuras planas que las engendran, es decir, aunque el problema hace referencia a figuras tridimensionales se reduce a un razonamiento en geometría bidimensional, es decir, un triángulo rectángulo que ha de estar incluido en un semicírculo, la hipotenusa será una cuerda de la semicircunferencia y uno de los catetos será parte del diámetro. Se deduce que para que la superficie del cono sea máxima, la hipotenusa y el cateto del triángulo han de ser máximas, con lo que el área del rectángulo generado por ellas deberá ser máxima. Como se puede observar, en el razonamiento considerado no se hace referencia ninguna a la fórmula relativa a la superficie del cono, todas las magnitudes se consideran en relación con figuras planas. El siguiente ejemplo se refiere a un paralelepípedo en el que uno de los lados es fijo y hay que calcular los otros dos para que con un volumen dado se obtenga la menor superficie, la solución sugiere que esos dos lados han de ser iguales. Aplicando este resultado al ejercicio siguiente en el que se plantea la misma situación pero sin tener ningún lado dado, como dos

³⁷ Entre todos los conos que se pueden inscribir en una esfera, determinar el que tiene la mayor superficie convexa.

³⁸ De todos los paralelepípedos que son iguales a un cubo dado, y que uno de sus lados es la recta dada b , cuál es el que tiene menor superficie.

³⁹ De todos los paralelepípedos que son iguales a un cubo dado a^3 , cuál es el que tiene menor superficie.

han de ser iguales sólo habrá que calcular el otro, resultando que los tres lados han de ser iguales, en definitiva se trata de un cubo.

I) Problemas relativos a recorridos mínimos.

Los tres problemas siguientes podemos incluirlos en el apartado relativo a recorridos mínimos ya que, aunque los dos primeros no lo indican expresamente, si podemos relacionarlos con otros de presencia habitual en los libros de texto actuales.

EXEMPLE IX. La ligne AEB étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); soit donnée une quantité composée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b & c. qu'on voudra. On demande quelle doit être la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée, soit plus grande ou moindre que cette même quantité lorsqu'elle est composée des droites CP, PF⁴⁰. (p. 47) (Fig. 3.17)

La situación planteada se refiere a una curva sobre la que inciden líneas a partir de un punto C y de la que parten otras líneas que llegan a otro punto F del otro lado de la línea. Las magnitudes de dichas líneas están multiplicadas por sendas cantidades a y b fijadas de antemano (que pueden referirse a velocidades por ejemplo aunque se indique que son rectas). Se trata de buscar un punto E de la curva para que la expresión obtenida sea la mínima posible. Dicha descripción se refiere a una situación en la que se trata de encontrar un recorrido mínimo bajo ciertas condiciones establecidas pero muy generales. La curva divide al plano en dos semiplanos, en cada uno de los cuáles la recta cumple unas determinadas condiciones, como si fueran dos medios distintos, en realidad se refiere a un problema relativo a la refracción, de hecho la solución indica que debe haber una razón entre las cantidades dadas y los senos de los ángulos formados entre las rectas y las perpendiculares a la curva de partida.

EXEMPLE X. Le cercle AEB étant donné de position avec les points C, F hors de ce cercle; trouver sur la circonférence le point E tel que la somme des droites CE, EF soit la moindre qu'il est possible⁴¹. (p. 49) (fig. 3.18)

El problema anterior es una particularización del anterior en el que la curva es un círculo y si los dos puntos fueran exteriores al círculo estaríamos ante un problema de reflexión.

EXEMPLE XI. Un voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F, doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a dans le tems c, & dans l'autre du côté de F l'espace b dans le même tems c: on demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin

⁴⁰ Dada una línea AEB que pasa por dos puntos fijos C, F; y habiendo encontrado para uno de sus puntos cualesquiera dos rectas CP (u) y PF (z); con los que se obtiene una cantidad compuesta de estas indeterminadas z y u y de otras rectas dadas a, b, etc como queramos, buscamos cuál debe ser la posición de las rectas CE y EF, a fin de que la cantidad dada, sea la mayor o la menor de cualquier otra cantidad que este compuesta de las rectas CP y PF.

⁴¹ Dado el círculo AEB y los puntos C, F fuera del círculo, encontrar sobre la circunferencia el punto E tal que la suma de las rectas CE, EF sea la menor posible.

qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de C en F⁴². (pp. 49-50)
(fig. 3.19)

Como aplicación de los resultados anteriores, se plantea el problema típico de un viajero que debe recorrer una distancia en un tiempo mínimo pasando por dos medios en los que las velocidades son distintas. El problema se resuelve en el texto de dos formas: aplicando los resultados anteriores a este caso particular y utilizando el teorema de Pitágoras para calcular el recorrido que hace en cada uno de los dos medios y poder minimizarlo. Este último método es el utilizado habitualmente por su sencillez en la resolución de este tipo de problemas en bachillerato.

J) Problemas especiales.

Por último tenemos un par de problemas realmente complicados, de los que no hemos encontrado ningún ejemplo en los manuales del siglo XX, y que están referidos a fenómenos físicos: el primero se refiere al estudio de la posición de una polea y el segundo a una cuestión relativas a la geodesia.

EXEMPLE XII

Soit une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D suspendu par la corde DFB qui passe au dessus de la poulie F, & qui est attachée en B, en sorte que les points C, B sont situés dans la même ligne horizontale CB. On suppose que la pulie & les CORDES n'ayent aucune pesanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter⁴³. (p. 51) (figs. 3.20)

Hay que encontrar el máximo de la distancia del plomo a la línea que une los puntos C y B. Dicho máximo se calcula de dos maneras: utilizando el teorema de Pitágoras para establecer las distancias necesarias para dicho cálculo, con lo cuál la resolución es típicamente analítica y similar a la que se usaría actualmente, o bien, estudiando geométricamente las figuras planas (triángulos) que representan gráficamente la situación, para establecer la semejanza de los principales triángulos, a partir de la cual por relación entre las proporciones adecuadas, se llega a la ecuación cuyas raíces son las soluciones del problema.

EXEMPLE XIII.

L'élévation du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuscule⁴⁴. (p. 52)

⁴² Un viajero parte de un lugar C para llegar a otro F, debe atravesar dos campiñas separadas por la línea recta AEB. Supongamos que el recorre en la campiña del lado de C el espacio a en el tiempo c, y en el otro lado de F el espacio b en el mismo tiempo c, buscamos por qué punto E de la recta AEB debe pasar a fin de emplear el menor tiempo posible para llegar de C a F.

⁴³ Sea una polea F que pende libremente al extremo de una cuerda CF fijada en un punto C, con un plomo D suspendido de la cuerda DFB que pasa por encima de la polea F, y que está fijada en B, de forma que los puntos C, B están situados en la misma línea horizontal CB. Supongamos que la polea y las cuerdas no sufren gravedad, en qué punto el plomo D o la polea F es detenido.

⁴⁴ Dada la elevación del polo, encontrar el día con el ocaso más corto.

Términos usados en la solución del problema como ecuador, horizonte, elevación, declinación, meridiano, círculo crepuscular atestiguan el tipo de ejercicio que se expone. El razonamiento que se utiliza es típico de cálculo diferencial y está asociado a la variación en el tiempo de la zona de iluminación del Sol en la Tierra. Para resolverlo se hace uso de conocimientos de geometría esférica, astronomía.

3.1.4.2.- Gráficas.

A) Gráficas cartesianas.

Las gráficas que podemos incluir dentro del calificativo de cartesianas son de tipo **ideograma (g)**; en ellas se representa el concepto que se quiere estudiar o analizar junto con ciertos elementos gráficos (rectas tangentes, subtangentes, triángulos infinitesimales), que ilustran mediante comparación los criterios para establecer si se tiene un punto crítico. Dichas gráficas aparecen en láminas desplegadas, como era usual en la época, intercaladas entre las páginas del texto, de forma que estuvieran cercanas a los contenidos en los que se utilizan como representación. Las gráficas aparecen numeradas consecutivamente de forma que cuando se hace referencia a ellas a lo largo del texto simplemente se nombran utilizando el cardinal que les corresponde. Como ya se ha indicado, solamente se hace uso de un eje de coordenadas que generalmente se representa horizontalmente: el eje de abscisas, a las cuáles l'Hôpital como el resto de los matemáticos de la época denomina *coupées*. Sobre dicho eje se levantan verticalmente las ordenadas llamadas *apliquées*. El origen se suele indicar mediante la letra A, las abscisas como AP y las ordenadas como PM, especificando para el caso de un punto crítico la notación ED. Para denotar ordenadas infinitamente cercanas a otras se utilizan las letras minúsculas, es decir, se nombran como pm.

Las dos primeras gráficas representan, respectivamente, los casos de un punto máximo y uno mínimo con **tangente horizontal (g)**. Se representan también, como se puede observar en las figuras las tangentes, subtangentes y triángulos infinitesimales en sendos puntos a la izquierda y a la derecha del punto crítico en cuestión. De esta forma se puede deducir a partir de dichas imágenes, si las subtangentes crecen o decrecen cuando se va acercando la abscisa al punto extremo o qué ocurre con los triángulos construidos sobre los puntos de las curvas (g).

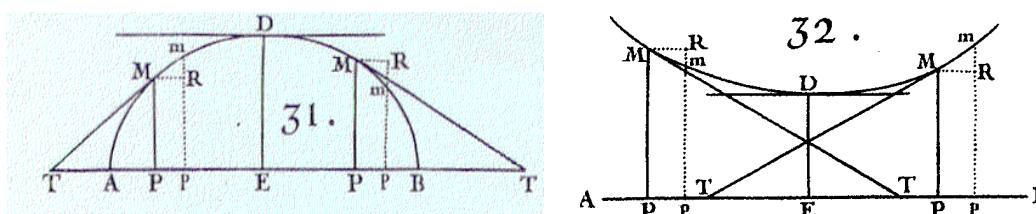
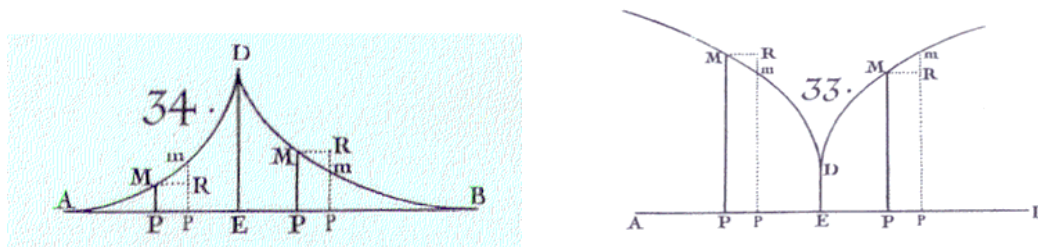


Fig. 3.4. Gráficas correspondientes a un máximo y un mínimo con tangente horizontal

De forma totalmente similar y paralela, se presentan los casos de puntos extremos en los que la **tangente es vertical** (g), por lo que la “diferencia” de l’Hôpital será infinita.



3.5 Gráficas correspondientes a un máximo y un mínimo con tangente vertical

Entre los elementos que se incluyen en dichas gráficas están los triángulos infinitesimales (g), representándose los dos casos posibles correspondientes respectivamente a la existencia de un máximo y a la de un mínimo. La figura de la derecha se utiliza además como representación gráfica del ejemplo II correspondiente a la semiparábola cúbica de Neile.

Los puntos de inflexión y los de retroceso también se identifican mediante gráficas en las que se presentan los elementos necesarios en relación con su reconocimiento, la ordenada correspondiente al punto en cuestión y las tangentes a la curva en dicho punto y en otro punto para poder compararlas (g). Así aparecen sendas gráficas en las que la curva viene definida a partir de un diámetro o eje horizontal AB:

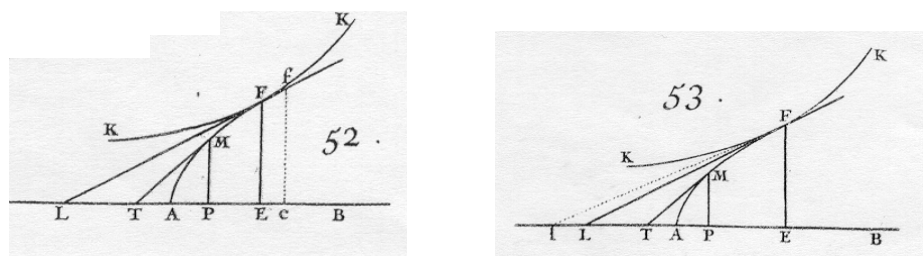


Fig. 3.6 Gráficas correspondientes a un punto de inflexión y un punto de retroceso.

Y se incluyen sendas gráficas en las que las ordenadas de la curva viene determinada a partir de un punto común B (g) en lugar de un diámetro o eje. Este tipo de representación ya no se utiliza en los libros actuales, tanto de texto como de matemáticas.

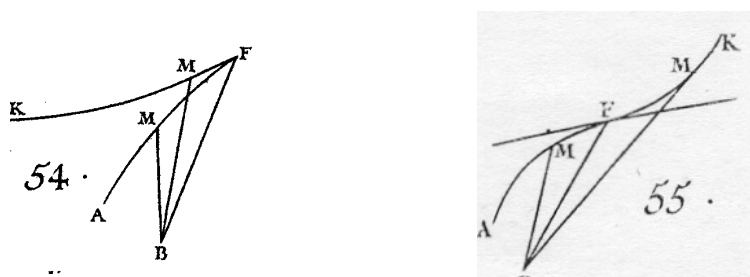


Fig. 3.7 Gráficas de un punto de inflexión y otro de retroceso definidos a partir de un punto B.

Cada uno de los ejemplos en los que se desarrolla el proceso de solución del problema planteado presenta una gráfica ilustrativa de la situación que en ocasiones es una gráfica cartesiana y en otras no. Así, respecto del primer ejemplo correspondiente a puntos extremos, tenemos la representación de una parte del Folium de Descartes:

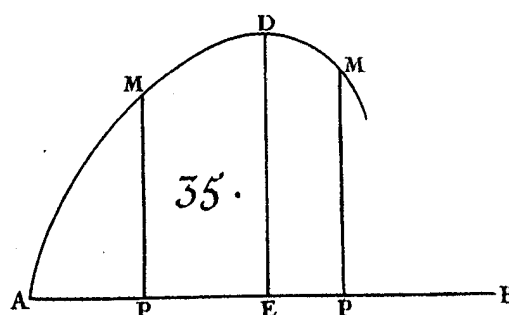
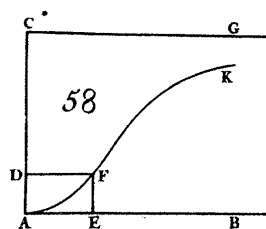


Fig. 3.8 Folium de Descartes

A partir de dicha gráfica no se aprecia la forma de la función, ya que sólo se ha representado parte del primer cuadrante⁴⁵ (en tiempos de Descartes se creía que la forma de esta gráfica era la formada por cuatro bucles simétricos respecto del origen). De hecho, esta misma gráfica, se utiliza para representar el caso de una cúbica ($y=ax^2-x^3$) que pasa por el origen de coordenadas y que corresponde a uno de los ejemplos estudiados anteriormente, aunque la concavidad en el origen, no es la misma para ambas funciones. Al autor sólo le interesa la zona en la que se encuentra el máximo por lo que representa no solamente este punto, sino dos ordenadas próximas para poder comparar gráficamente las magnitudes correspondientes. Podemos por lo tanto considerar dicha gráfica como un inicio de las que después denominaremos **topológicas**.

Otras curvas que se incluyen son las correspondientes a la función dada por la ecuación $axx=xy+aay$ de la que se representa solamente la parte correspondiente al primer cuadrante como en el ejemplo anterior en el que aparece un solo punto de inflexión:

⁴⁵ Se puede comparar con la gráfica que aparecen en la página 142.

Fig. 3.9 Gráfica de la función $axx=xy+aay$

Y la Concoide de Nicomedes que viene definida a partir de un punto fijo P denominado polo, con lo que para calcular sus puntos críticos hay que aplicar la regla obtenida para este tipo de curvas y que ha sido descrita anteriormente.

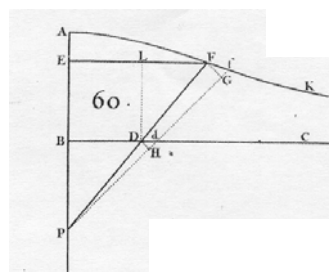


Fig. 3.10 Concoide de Nicomedes.

Además de esas dos curvas, que podemos denominar “clásicas”, se representan gráficamente curvas relacionales como es el caso de la función $y=x^m(a-x)^n$ (ejemplo V) para la que se consideran sucesivamente diferentes casos correspondientes a las siguientes variaciones de exponentes, y cuyas gráficas aparecen a continuación:

- $m=2, n=1$ (fig. 35) que debería ser una cúbica con un máximo aunque como se ha dicho antes se ha utilizado la misma representación del Folium de Descartes.
- $m=2, n=-1$ (fig. 37) que es una función racional con una asíntota vertical y una inclinada con un mínimo en el primer cuadrante.
- $m=1, n=-2$ (fig. 38), función racional con una asíntota vertical.
- También se representa (fig. 39) el caso de una función del tipo $\frac{(a+x)(c-x)}{(b-x)x}$ (ejemplo VI) para la que se busca el mínimo.

Para cada uno de los casos indicados anteriormente se representa, como se ha dicho la curva correspondiente, de forma que dicha representación está distorsionada (g). Lo único que interesa resaltar es la existencia de un punto extremo y representar la concavidad correspondiente en ese punto, pero no se mantiene la exactitud en las medidas y las

relaciones entre éstas, así perceptivamente nos puede dar la impresión de estar ante una parábola cuando en realidad la función es racional y el comportamiento, por ejemplo, asintóticamente es muy distinto. A continuación se presentan las gráficas indicadas para las que se puede observar claramente la distorsión mencionada.

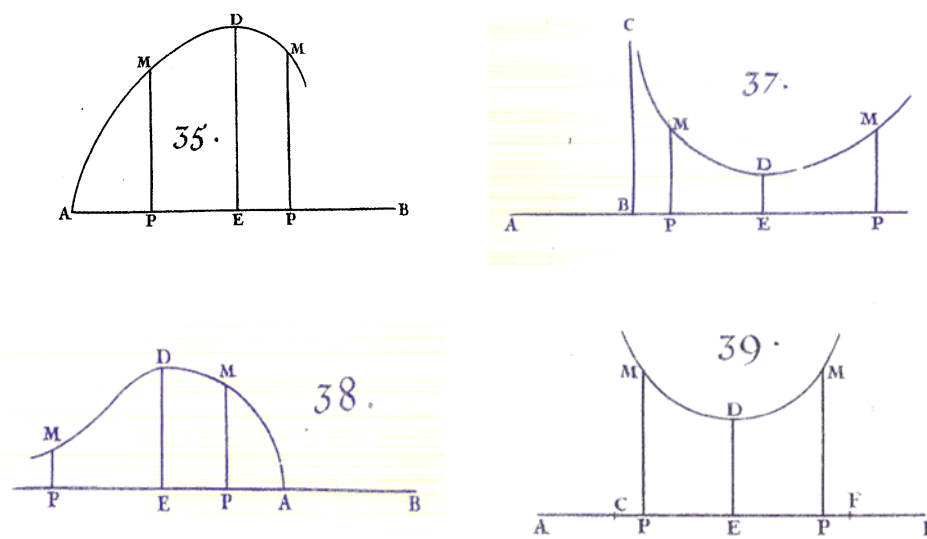


Fig. 3.11. Representación de funciones algebraicas

B) Gráficas construidas a partir de una gráfica auxiliar.

La siguiente gráfica (ejemplo III) corresponde a una función cuyas ordenadas no se relacionan con el eje de abscisas, sino que se calculan a partir de los puntos de una semicircunferencia que podemos considerar como figura auxiliar, de la siguiente forma:

1. Se establece un punto A de la semicircunferencia como origen de coordenadas y otro punto B de la misma semicircunferencia como final, siendo AB un diámetro (representado verticalmente).
2. Al punto B considerado de la forma descrita en el punto anterior, le corresponde un punto F de la curva que se quiere construir de forma que $AB > BF = b$, siendo b una cantidad fijada de antemano y BF perpendicular a AB.
3. Para el resto de los puntos N de la circunferencia se considera el arco desde el origen A de coordenadas, AN.
4. A dicho punto N le corresponde un punto M de la curva que se quiere construir, de forma que:

$$\frac{AN}{BF} = \frac{AN}{NM}$$

5. De esta forma, a cada abcisa AP, le hacemos corresponder la ordenada $PM=PN+NM$.

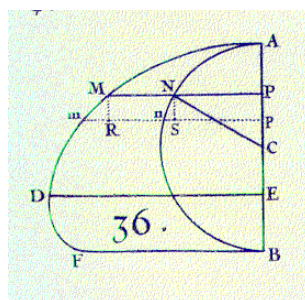


Fig. 3.12 Roulette

Otra roulette construída de forma similar a la anterior pero que posee puntos de inflexión:

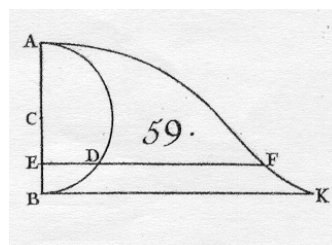


Fig. 3.13 Roulette con un punto de inflexión.

La siguiente gráfica se define a partir de un círculo y se describen las condiciones que debe cumplir para que sea una espiral parabólica: A partir de un círculo AED con centro en B se construye la línea curva AFK tal que escogiendo un radio BFE se cumpla que el cuadrado FB sea igual al rectángulo del arco AE por una cantidad determinada b.

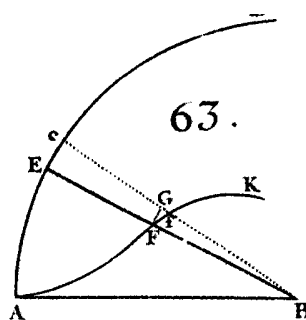


Fig. 3.14. Espiral logarítmica

Por último, otra curva que se incluye en este grupo y que al igual que las anteriores se describe su construcción a partir de ciertos elementos geométricos, es la siguiente en la

que una curva AFK con eje la recta AB, que tiene la propiedad de que una tangente cualquiera a la curva FB, corta al eje AB en un punto B de forma que el segmento AB sea siempre a la tangente⁴⁶ en una razón determinada m a n.

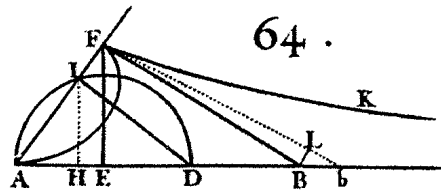


Fig. 3.15

C) Gráficas que ilustran la situación planteada.

El primer caso se refiere a un cono inscrito en una esfera (ejemplo VI). Se representa la semicircunferencia que genera la esfera, diferentes triángulos rectángulos que pueden generar el cono pedido (el que tenga superficie mínima), y la curva construida de la siguiente forma: para la altura de cada triángulo rectángulo (que sería la abcisa) se representa una ordenada correspondiente al área del rectángulo que tiene como magnitudes la altura y la base del triángulo. La figura resultante es la siguiente:

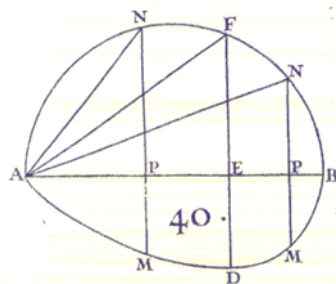


Fig. 3. 16 Sección de un cono y una esfera circunscrita así como la función generada por el área lateral del cono MDM

Se puede observar la similitud entre la curva resultante y la gráfica de la función⁴⁷ $y = \sqrt{a^2x^2 - ax^3}$, que es la siguiente:

⁴⁶ Generalmente l'Hôpital utiliza acepciones relativas a rectas como línea recta o tangente pero refiriéndose, no a toda la recta, sino a ciertos segmentos de dichas rectas determinados por los puntos de corte con curvas o ejes. Por lo tanto, el término tangente en este caso no debe entenderse como la recta tangente sino como el segmento de dicha recta comprendido entre el punto de tangencia y el corte con el eje de abscisas.

⁴⁷ Expresión simbólica de la función correspondiente al área lateral de un cono inscrito en una esfera.

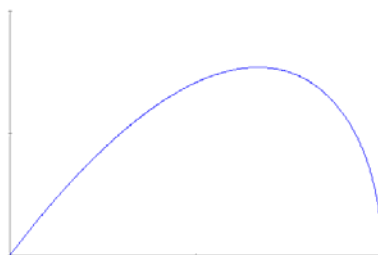


Fig. 3.16 Área lateral del cono

Se observa claramente que la función tiene un máximo y no un mínimo, como pedía el problema. Podemos considerar que hay tres claves que pueden haber conducido a dicho error: el hecho de haber realizado el razonamiento a partir del área de la figura, en lugar del perímetro, ha hecho que se produzca una confusión, en realidad lo que se ha encontrado ha sido el cono de volumen máximo inscrito en la esfera, la ausencia del criterio de la derivada segunda (d) que permite dilucidar si el valor obtenido es un máximo o un mínimo, el gráfico de la figura que se ha hecho en el cuarto cuadrante (según el punto de vista actual) en lugar del primero, que es en el que se encuentra la función en cuestión, como hemos visto al representarla gráficamente (g).

En otro gráfico se representa la situación de una línea recta que incide sobre una línea curva, obteniéndose otra línea recta a partir de la curva, bajo condiciones determinadas por dos magnitudes dadas de antemano a y b , que aparecen igualmente en la gráfica.

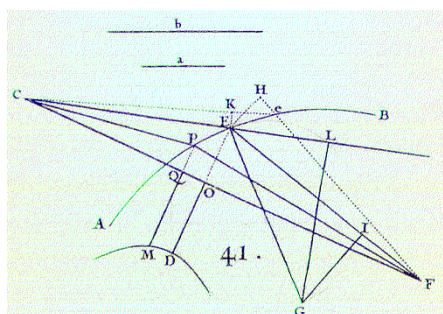


Fig. 3. 17 Refracción de un haz de rayos al incidir sobre una curva.

En definitiva se trata de una situación que podemos relacionar con la refracción, de hecho la solución que se obtiene es precisamente la ley de refracción. Como se plantea de forma muy general, no se hace referencia ni a una función ni a una solución concreta. La curva que se dibuja trazando perpendiculares desde los puntos obtenidos es general, de hecho se representan un trozo tan pequeño que no ha lugar para la comparación con ninguna función conocida (g).

De forma similar se hace para la reflexión cuando una línea recta incide sobre un círculo

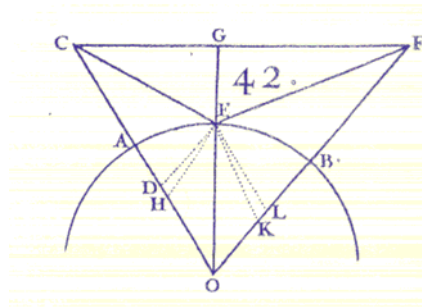


Fig. 3.18 Reflexión de un haz de rayos al incidir sobre una curva.

y para el clásico problema de recorridos mínimos en los que la línea recta incide sobre otra línea también recta.

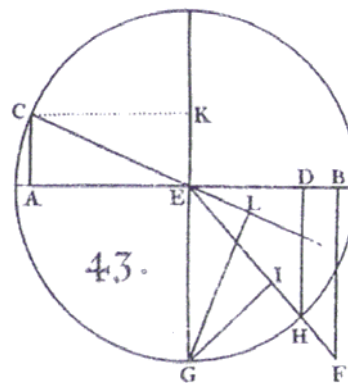


Fig. 3.19 Refracción sobre una línea recta

Los dos últimos gráficos representan imágenes geométricas de situaciones reales: el caso de la polea y el del cálculo relativo al ocaso del sol. Estos gráficos permiten realizar un razonamiento geométrico a partir de las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes elementos que las configuran, pero no se hace referencia a ninguna función ni, por lo tanto, a la curva representativa de la función. Estas gráficas permiten utilizar los triángulos infinitesimales a partir de los cuáles y por semejanza de triángulos, hacer los cálculos oportunos (g).

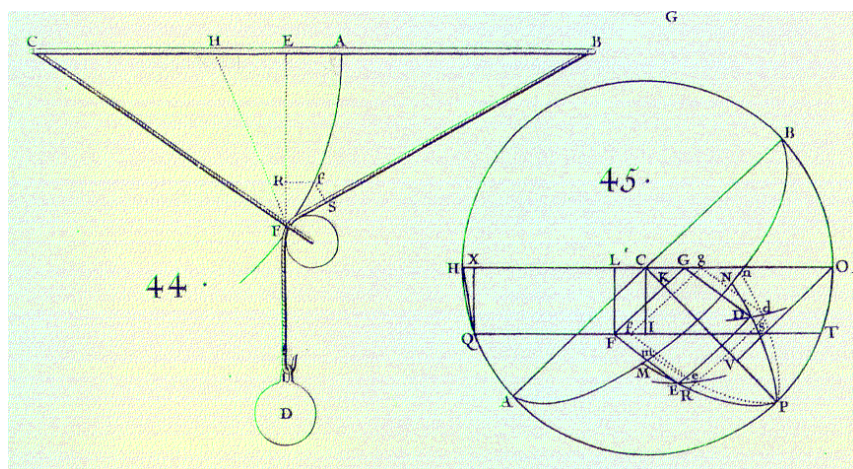


Fig. 3.20.- Movimiento de una polea.

3.1.4.3.- Expresiones simbólicas.

Como no se utiliza el concepto de función, no hay ninguna notación asociada a él. Todos los símbolos hacen alusión a curvas (**e**) de las que ya hemos comentado la simbolización utilizada para aludir a los diferentes elementos (abscisas, ordenadas, origen,...) que las configuran. Las expresiones simbólicas de dichas curvas es la que describe Descartes en su Geometría, de forma que en *l'Encyclopedie* se manifiesta:

Mais ce qui appartient absolument a Descartes, & ce qui lui sera un honneur immortel, c'est d'avoir appliqué l'Algebre a la Théorie des lignes courbes. Il regarde une courbe comme engendrée par les extrémités d'une suite des lignes variables, qui repond à d'autres lignes variables, & après avoir formé une equation qui exprime la loir suivant laquelle ces deux suites de lignes les unes par rapport aux autres, il construire la courbe⁴⁸. (p. liv preface)

Esto nos da una idea del manejo que tenían los matemáticos de las curvas que es justamente al contrario de la actual. El pensamiento geométrico que poseían hacia que fuera normal pensar sobre la curva y no sobre su expresión algebraica, mientras que actualmente resulta complicado razonar sobre la curva sin tener su expresión algebraica.

Los puntos de una curva se representan mediante letras mayúsculas y un incremento infinitesimal correspondiente a dicho punto mediante la misma letra en minúscula. Hay que destacar que todas las expresiones utilizadas representan familias de funciones (**e**), x representa la abscisa que varia AP, y, la ordenada correspondiente PM, y $a=AB$ es la magnitud del eje horizontal sobre el que se representa la función y que también interviene

⁴⁸ Pero lo que pertenece totalmente a Descartes, y que será un honor inmortal, es haber aplicado el Álgebra a la Teoría de las líneas curvas. El ve una curva como engendrada por los extremos de una sucesión de líneas variables, que corresponden a otras líneas variables y que después de haber formado una ecuación, que expresa el lugar según el cual estas dos sucesiones de líneas varían las unas en relación con las otras, el construye la curva.

en la expresión simbólica como podemos constatar en las diferentes expresiones que aparecen a continuación. Para representar la diferencia se utiliza la letra d y para las diferencias sucesivas se indica:

On marquera dans la suite chaque différence par un nombre de d qui en exprime l'ordre ou le genre. Par exemple, on marquera par dd la différence seconde ou du second genre ; par ddd , la différence troisième ou du troisième genre ; par $dddd$, la différence quatrième ou du quatrième genre ; & de même des autres...

Quant aux puissances de ces différences, on les marquera par des chiffres postérieurs mis au dessus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entières. Por exemple, le carré, ou le cube de dy sera dy^2 , ou dy^3 ; le carré, ou le cube de ddy sera ddy^2 , ou ddy^3 ; celui de ddy sera $dddy^2$, ou $dddy^3$; celui de $ddddy$ sera $ddddy^2$, ou $ddddy^3$, &c⁴⁹. (pp. 55-56)

La regla que permite calcular los puntos de inflexión y de retroceso como hemos indicado anteriormente viene dada mediante las expresiones:

$$ddy=0 \text{ o infinito}$$

$$dx^2+dy^2-yddy=0 \text{ o infinito}$$

Hay que hacer notar que las expresiones anteriores están expresando diferencias infinitesimales y no como concebimos ahora el diferencial como variación infinitesimal de una variable respecto a otra, en cuyo caso estaríamos ante una razón o proporción.

En general las expresiones se refieren exclusivamente a funciones racionales, habiendo alguna irracional (**e**) y estando siempre relacionadas con algún ejemplo de los descritos anteriormente. La primera expresión que aparece es la de una función implícita (**e**) de grado tres, que puede ser fácilmente parametrizable como ya hemos señalado anteriormente: $x^3+y^3=axy$ (p. 42). Actualmente, no es una función muy usada aunque en el momento en el que fue escrito este libro, la elección de esta función está justificada porque se intenta mostrar la potencia, sencillez y eficacia de los nuevos métodos de cálculo. Igualmente ocurre con la función $axx = xxy + aay$ (p. 63).

Se incluye una función polinómica como $y = \frac{axx - x^3}{aa}$ (p. 44) relativa a una recta que se corta en dos partes, de forma que una determinada combinación de esas partes dé un

⁴⁹ Indicamos que a partir de ahora cada diferencia por un número d que expresa el orden o el género. Por ejemplo, indicamos por dd la diferencia segundo o de segundo género; por ddd , la diferencia tercer o de tercer género; por $dddd$, la diferencia cuarta o de cuarto género; y así mismo las otras.

En cuanto a las potencias de estas diferencias, indicamos por la cifras posteriores colocadas por encima, como lo hacemos de forma corriente para las magnitudes enteras. Por ejemplo, el cuadrado o el cubo de dy será dy^2 , o dy^3 ; el cuadrado o el cubo de ddy será ddy^2 , o ddy^3 ; la de ddy será $dddy^2$, o $dddy^3$, la de $ddddy$ será $ddddy^2$, o $ddddy^3$, etc.

máximo y que se generaliza por medio de la función $y = x^m \times \overline{a-x}^n$ (p. 44)⁵⁰. Considerando diferentes tipos de exponentes positivos o negativos aparecen distintas funciones racionales, entre las que también se pueden incluir funciones como: $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$ (p. 45) relativa a la división de una recta e, $y = \frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b}$ (p. 46), $y = \frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3x}$ (p. 47) que representan ambas la superficie de un paralelepípedo que se pretende optimizar.

Tenemos algunas funciones irracionales como: $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$ (p. 43) que representa la parábola semicúbica de Neile, $y = \frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a}$ (p. 46) utilizada para calcular la superficie mínima de un cono, $y = \frac{c\sqrt{gg + xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff - 2fx + xx + hh}}{b}$ (p. 51) para calcular el tiempo tardado por el viajero en recorrer la distancia establecida e $y = b - \sqrt{aa + cc - cx} + \sqrt{aa - xx}$ (p. 51) que representa la distancia del plomo a la cuerda CB, $y - a = \overline{x - a^{\frac{3}{5}}}$ (p. 64) para calcular un punto de inflexión, o en relación con la conoide de Nicomedes $y = \frac{\overline{b + x\sqrt{aa - xx}}}{x}$ (p. 65) y la otra conoide $y = \overline{b + x\sqrt{\frac{a-x}{x}}} = \sqrt{ax - xx} + b\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ (p. 67).

Otras vienen representadas como funciones de dos variables, como es el caso de la demi-roulette, utilizada en relación con los puntos de inflexión que viene determinada por la ecuación $y = z + \frac{bu}{a}$ donde $z = \sqrt{2cx - xx}$ (p. 65).

Entre las funciones utilizadas en los libros del siglo XX sólo hemos encontrado la expresión relativa a una hipérbola $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$ (p. 49), aunque dicha expresión no suele ser la utilizada actualmente.

Por último, en algunas en lugar de utilizar la expresión algebraica de la función, se construye una expresión en la que intervienen las diferencias, como es el caso del último ejemplo considerado (fig. 64), en la que por la propiedad de la curva se deduce que:

⁵⁰ La línea horizontal por encima de la expresión polinómica se utilizaba en la época de la misma forma que utilizamos nosotros el paréntesis.

$$AE+EB=AB\left(\frac{xdy-ydx}{dy}\right).BF\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right)::m.n$$

$$\text{Luego } m\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{nx dy}{y} - ndx \text{ (L'Hopital, p. 69)}$$

3.1.5.- Conclusiones.

A continuación presentamos las conclusiones respecto de cada uno de los tipos de análisis considerados y teniendo en cuenta los campos que hemos descrito en el capítulo anterior referentes al Análisis de la documentación.

3.1.5.1.- Análisis socio-cultural.

- CIA2: El marqués de l'Hôpital obtuvo su formación en cálculo diferencial directamente de Bernoulli, lo que supuso para él, ser uno de los primeros matemáticos en conocer los avances que realizó Leibniz en esta rama de las matemáticas, y descubrir, por lo tanto, la potencia de los nuevos métodos para el estudio de las curvas.
- CIA1: El libro fue publicado en París en 1696 por primera vez, se utilizó como libro de texto en prácticamente todas las Escuelas Politécnicas, escuelas militares, Universidades y Academias, por lo que se llevaron a cabo diversas ediciones de dicho libro. Por ello podemos concluir la gran labor que se llevó a cabo de divulgación de estos nuevos conocimientos.
- CEM1: Podemos considerar que la estructura de la obra es la clásica de los libros de matemáticas, heredando la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos “primarios” que van a aparecer a lo largo del texto, se van a suceder las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión ejemplificarla.
- d: Las aplicaciones se establecen en relación con curvas polinómicas que no se presentan clasificadas según el grado de su mayor potencia sino que se consideran las curvas de tipo clásico como: Folium de Descartes, Parábola semicúbica de Neile, espiral logarítmica,... Las situaciones planteadas, utilizan un contexto geométrico en el que las cantidades son consideradas más como magnitudes de objetos geométricos, que como números, aún en el caso de los problemas de tipo aritmético. Hemos de resaltar por ello la aplicación de estos nuevos conocimientos al estudio de curvas clásicas, algunas de las cuáles ya fueron descritas por los geómetras griegos. Hemos de tener en cuenta que

inicialmente el Análisis surgió para poder resolver los problemas que los matemáticos tenían planteados en relación con dichas curvas.

El estudio de cuerpos geométricos clásicos: paralelepípedos, conos, esferas, restringe asimismo la aplicación de los resultados obtenidos a unas situaciones ideales y particulares, con lo que no se aborda la aplicación a cuerpos relacionados con objetos de tipo práctico, es decir, se está desarrollando una matemática en la que se enfatizan las aplicaciones ideales más que las prácticas, una matemática desarrollada y considerada en sí misma. Esto no impide que, como se ha visto, se estudien problemas relacionados con la reflexión y la refracción de la luz, el recorrido mínimo, el movimiento de una polea o el estudio del crepúsculo, que eran en aquella época el tipo de problemas en los que estaban involucrados todos los matemáticos desde hacía bastante tiempo y que por lo tanto podemos también considerar de tipo clásico.

3.1.5.2.- Análisis epistemológico.

- CIA2: Ya hemos dicho anteriormente que l'Hôpital recibió su formación directamente de Jean Bernoulli, el cual mantenía una correspondencia regular con Leibniz, con la que estaba al tanto de los nuevos métodos de Cálculo Diferencial y discutía los resultados que se iban obteniendo. Esto le permitió a l'Hôpital darse cuenta de la potencia de esta rama de las matemáticas, así como de las aplicaciones que de ella se podían obtener.
- CIA4: Entre las novedades que ofrece este libro de texto está la inclusión del resultado que se ha conocido como “regla de l'Hôpital” para límites indeterminados, el que se tratan por primera vez de las magnitudes infinitas, ya que en el Análisis ordinario sólo se consideraban las que eran finitas.
- CEM3: Entre las aplicaciones incluidas en el libro, resalta l'Hôpital el estudio de la curvatura de las curvas, el cálculo de tangentes y perpendiculares, el análisis de los puntos de inflexión y de retroceso y el estudio de los rayos que se reflejan o se refractan. Se establecen, por lo tanto, una colección de métodos analíticos necesarios para resolver problemas sobre curvas, considerando las cantidades desde un punto de vista geométrico. También menciona las posibles aplicaciones a la física y a la mecánica, que no se reflejan en el libro.
- d: Los dos primeros postulados que establece l'Hôpital se pueden considerar esenciales en cuanto a su forma de percibir el Análisis Matemático en general y el Cálculo Diferencial en particular. En el primero: “Se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña”, se establece la regla para el manejo algebraico de las magnitudes, ampliando la noción que se tenía hasta entonces de igualdad, y el segundo: “una curva puede ser considerada como formada por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva”, plantea el significado geométrico de la noción de curva, tratándose de

una concepción estática en la que se considera como formada por trozos rectos de longitud infinitesimal.

El concepto que tiene l'Hôpital de diferencial varía respecto de la de Leibniz, en el sentido de que para éste son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variables, mientras que para aquél son las partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen las magnitudes, con lo que ofrecerá una visión del Cálculo Diferencial eminentemente dinámica.

- e: Ya que no se maneja el concepto de función, no hay expresiones simbólicas asociadas a ella sino que todas hacen referencia a curvas, es decir, podemos considerar que se trata de un Análisis de tipo geométrico. Las expresiones simbólicas que se estudian incluyen parámetros que sugieren el análisis de familias de funciones más que curvas concretas, con lo que se establecen resultados de tipo general. Se completa el estudio analizando cómo afecta la variación en el grado de la curva manteniendo fijos los parámetros. Por lo que podemos considerar que el objeto de estudio no son las curvas sino las familias de esas curvas cuyo comportamiento se presume similar.

Los tipos de expresiones que se manejan son de tipo algebraico fundamentalmente, es decir, funciones polinómicas y racionales, aunque se consideran también importantes las funciones irracionales. De todas formas, esta no es la clasificación de curvas que realiza l'Hôpital sino que, como ya hemos mencionado, los grupos que establece se refieren a distintas familias de funciones y se restringe prácticamente a las curvas clásicas. Se utilizan indistintamente expresiones implícitas o explícitas.

3.1.5.3.- Análisis didáctico.

- CIA3: L'Hôpital trató de escribir un buen libro de texto que explicase el Cálculo Diferencial que hasta entonces había sido ajeno a prácticamente toda la comunidad de matemáticos y de estudiantes. Como se pretendía la difusión de este saber, se suponía que el lector o estudiante estaba familiarizado con los métodos y conceptos matemáticos, con lo que podía resultar intrincado para un lector ajeno a dicha rama del conocimiento.
- CEM2: Como un buen libro de texto comienza dando las definiciones necesaria y los postulados sobre los que se va a edificar el resto del libro. Se obtienen las fórmulas para las expresiones algebraicas y se aplican al cálculo de máximos, mínimos, puntos de inflexión y de retroceso, curvaturas, caústicas y límites de expresiones indeterminadas.
- CEM4: El libro está escrito en francés y la impresión corresponde a las características de la época. Los conceptos se resaltan en cursiva lo que constituye uno de los pocos elementos didácticos incluidos en el libro. Es resaltable y característico de este tipo de libros el empleo de hojas desplegadas para las

representaciones gráficas y que se utilizan para visualizar los conceptos descritos.

- d: La definición que se ofrece de puntos máximos y mínimos es dinámica en el sentido de que los relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las ordenadas. Se consideran desde un punto de vista geométrico en el que las ordenadas se consideran líneas y se establece la posición que debe tener la tangente en esos puntos para que sean puntos críticos. Asimismo, las demostraciones que se incluyen se basan en razonamientos de tipo geométrico. Debido a este tipo de consideraciones, dichos puntos pueden tener la tangente horizontal o vertical, distinción que no se establece en los libros de texto actuales. Se hace referencia a otros elementos geométricos como subtangente, subnormal,... Hemos de resaltar en torno a este punto dos características del Análisis que se ponen manifiesto a través de las definiciones que son su carácter dinámico y geométrico.
- g: El papel que tienen las gráficas a lo largo del texto es el de visualizar las propiedades que poseen los conceptos que se están analizando para lo cual se utilizan gráficas tipo ideogramas, así como servir de guía y apoyo en los razonamientos geométricos que se desarrollan para demostrar dichas propiedades o para establecer las reglas de cálculo de los puntos críticos, para lo cual se incluyen elementos como tangentes, subtangentes, triángulos característicos..... Las gráficas aparecen incluso distorsionadas porque se está realizando un razonamiento de tipo local, es decir, sólo importa el comportamiento de la curva en el entorno de un punto y no la forma que ésta tenga globalmente.

Hay que destacar algunas representaciones en las que se incluye tanto el fenómeno que se estudia como la curva que lo representa como es el caso de la figura 3.17.

3.2.- *Traité des Fluxions* de Colin MacLaurin (1742).

3.2.1.- Ficha de referencia de la obra

Autor: Colin MacLaurin

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: 1698-1746

Título: *Traité des fluxions*. (dos tomos).

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1742

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1749. (traducido del inglés por R.P. Pezenas, jesuita profesor real de Hidrografía en Marsella en la Academia de Bellas Artes de Lyon) París Quay des Augustius

Localización del manual utilizado: Biblioteca General de la Universidad de Salamanca. Ref. 12932-33. Procedente de la Librería del Colegio de la Compañía de Jesús de Salamanca.

3.2.2.- Contextualización e intencionalidad del autor.

La obra iniciada por Newton y Stirling sobre curvas planas fue continuada por Colin MacLaurin, el matemático inglés más brillante de la generación posterior a Newton. Este autor se educó en Glasgow y a los diecinueve años ya era profesor de matemáticas en Aberdeen, para pasar a enseñar en la Universidad de Edimburgo seis años después (**CIA2**). En general, los matemáticos de los siglos XVII y XVIII de Inglaterra, Suiza y los Países Bajos enseñaban en las universidades, mientras que en Francia, Alemania y Rusia, estaban integrados en las academias que poco tiempo antes habían formado los gobernantes absolutos.

Este libro no es un libro más sobre técnicas del cálculo, sino un esfuerzo por establecer la materia sobre unas bases análogas a las de la geometría de Arquímedes (**CIA3**). El motivo era el de defender el cálculo de los ataques que se habían lanzado, sobre todo del obispo George Berkeley (1685-1753) en una pequeña obra titulada *The Analyst*.

Une Lettre intitulée *l'Analyse*, & qui parut en 1714, fut la première occasion du *Traité* suivant, & plusieurs raisons m'ont engagé à m'étendre, autant que je l'ai fait, sur cette matière. L'Auteur de cette Lettre a représenté à la Méthode des Fluxions, comme pleine de mystères, & comme fondée sur de faux raisonnements. Le style concis qu'on a employé communément dans les éléments de cette Méthode, a vraisemblablement occasionné la plupart de ses objections, & les écarts d'un homme de ce mérite m'ont persuadé qu'il étoit nécessaire de donner les principes de cette Science dans un plus grand détail⁵¹. (p. ix)

⁵¹ Una carta titulada *L'Analyst*, que apareció en 1714, fue la primera razón del siguiente Tratado, y muchas otras razones que me han inducido a mi entender, por lo que lo he hecho sobre esta materia. El autor de la carta ha presentado el Método de Fluxiones como lleno de misterios y fundado en razonamientos falsos. El estilo sencillo que se ha empleado para los elementos de este Método probablemente ha ocasionado la mayor parte de estas objeciones, las diferencias con un hombre de este mérito me han persuadido de que sería necesario dar los principios de esta ciencia con el mayor detalle.

En él Berkeley no negaba la utilidad de las técnicas de las fluxiones ni la validez de los resultados obtenidos utilizándolas, pero se había irritado al encontrarse con que un amigo enfermo rechazaba el consuelo espiritual, porque Halley lo había convencido de que la doctrina cristiana era insostenible. En sus críticas hace notar que al calcular o bien las fluxiones o las razones de las diferenciales, los matemáticos suponen en primer lugar que se les da ciertos incrementos no nulos a las variables, para eliminarlos más tarde suponiéndolos iguales a cero. Explicado el cálculo de esta manera, le parecía a Berkeley simplemente un juego de compensación de errores. Berkeley condena incluso la explicación de Newton de las fluxiones en términos de razones primeras y últimas, negando la posibilidad de una velocidad literalmente instantánea, en la que los incrementos de la distancia y del tiempo se han desvanecido para dejar lugar a un cociente sin sentido $0/0$.

Para contestar a estas críticas fue para lo que escribió MacLaurin su *Treatise of Fluxions* en el estilo riguroso de los matemáticos clásicos, pero al hacerlo así, utilizó un enfoque geométrico, que es menos revelador de los nuevos desarrollos que iban a caracterizar el Análisis que ya se estaba haciendo en Europa continental.

Je formai le dessein de démontrer ces élémens à la maniere des Anciens, & de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les demonstrations les plus rigoureuses⁵². (p. ix)

Les Démonstrations Mathématiques ont toujours terminé toutes les disputes, & elles ne permettent pas de douter, ni de chicaner. La Géométrie a acquis ce caractère d'évidence par le grand soin que les anciens ont pris de n'admettre que peu de principes évidens par eux-mêmes, & de ne donner pour démonstration, que ce qui étoit conclu évidemment de ces premiers principes⁵³. (p. i.)

En realidad, MacLaurin fue el único matemático inglés importante de la época. Sin embargo, en su libro aparecen una serie de resultados relativamente nuevos, incluido el criterio de la integral para la convergencia de series, que había sido formulado antes por Euler en 1732, pero que había pasado desapercibido en general.

En esta obra aparece la llamada serie de MacLaurin (**CIA4**), que es un caso especial de la que fue publicada por Brooke Taylor (1685-1731) en 1715, en su tratado *Methodus incrementorum directa et inversa*. Se trata simplemente del desarrollo en serie en el punto 0, y había aparecido en el *Methodus differentialis* de Stirling más de una docena de años antes que la publicara MacLaurin.

MacLaurin comenzó a publicar artículos en las *Philosophical Transactions* antes de cumplir los veintiún años, y en 1720 publicó dos tratados sobre curvas: la *Geometría orgánica* y el *De linearum geometricarum proprietatibus*. El primero de ellos se hizo muy

⁵² Tengo el deseo de demostrar estos elementos a la manera de los Antiguos, y no apoyarme nada mas que en un número pequeño de principios irrefutables, para que las demostraciones sean más rigurosas.

⁵³ Las demostraciones matemáticas han terminado siempre todas las disputas, no admiten la duda ni los obstáculos. La Geometría ha adquirido su carácter de evidencia por el gran cuidado que han tenido los Antiguos de no admitir más que unos pocos principios evidentes en si mismos y de no dar como demostrado mas que lo que se puede concluir de estos primeros principios.

famoso porque extiende los resultados de Newton y Stirling sobre cónicas, cúbicas y curvas algebraicas de orden superior **(CIA5)**.

3.2.3.- Caracterización de la estructura de la obra.

El libro tiene 344 páginas divididas en 11 capítulos en los que se trata de encontrar las fluxiones de algunas figuras conocidas **(CEM1)**. Contiene además 18 láminas con representaciones gráficas de algunas de las figuras con construcciones geométricas, que luego va a utilizar para calcular dichas fluxiones y hacer los razonamientos oportunos.

Comienza la obra con una introducción en la que se dan las nociones en las que se va a basar el resto de la obra. Considera, como se ha dicho anteriormente, que el método de demostración establecido por los griegos es el único admisible, a pesar de que algunos matemáticos por aquella época realizan razonamientos de tipo más abstracto:

On lui a cependant reproché en bien des occasions, que les nouveaux progrès qu'elle fait, sont établis sur des maximes, la plupart nouvelles & sujettes à contestation ; que ces maximes sont trop abstraites pour mérites quelque rang parmi les premiers principes de l'ancienne Géométrie⁵⁴ (p. i.)

Distingue el método de Newton del que han utilizado otros matemáticos, fundamentalmente de aquellos que consideran la línea compuesta de puntos, las superficies de líneas y los sólidos de superficies, como ha sido el método seguido por algunos de los muchos sabios anteriores que lo utilizaron para sus demostraciones como Apolonio, Cavalieri,... Aclara que algunos de estos sabios, al no confiar en este método por no ser exacto, lo han bautizado con el nombre de método de los infinitamente pequeños, o método de los que pueden dividirse hasta el infinito, y han supuesto así que toda magnitud está compuesta por estos elementos. De esta forma, los matemáticos consideraban que seguían trabajando con los métodos clásicos de la Geometría, a los que se habían añadido estas nuevas magnitudes. El hecho de razonar sobre ellas, supuso introducir un cierto rango de diversos infinitos y de elementos infinitamente pequeños. En cambio, Newton no utiliza estos infinitamente pequeños, sus razonamientos se basan en el flujo del movimiento, de esta forma intenta ver de qué manera puede comparar las velocidades de los movimientos que producen estas cantidades, consideradas las unas con las otras.

Les démonstrations de cette méthode, qui ont été imaginées par l'Auteur des Fluxions, sont exactes & élégantes ; mais je me propose de commencer par une démonstration qui est un peu différente, & qui étant moins éloignée de la méthode des Anciens rendra celle de l'Auteur plus aisée aux Commençans & qui pourra servir à réfoudre quelque difficultés que l'on a proposées contre cette méthode⁵⁵. (p. iiij)

⁵⁴ Debo reprochar en bien de la causa, que los nuevos progresos que se hacen, son establecidos sobre máximas, la mayoría nuevas y sujetas a contestación; que estas máximas son muy abstractas para exigencias de cualquier rango entre los primeros principios de la Geometría antigua.

⁵⁵ Las demostraciones de este método, que han sido imaginadas por el autor de las Fluxiones son exactas y elegantes; pero yo me propongo comenzar por una demostración que es un poco diferente, y que está menos

En la introducción, se describe el método de exahusción⁵⁶ que aparece en el libro de los Elementos de Euclides, y posteriormente hace una demostración de su uso en algunos casos, como cuando se trata de comparar áreas de elipses o círculos, o para calcular el área de figuras inscritas o circunscritas en una sección cónica,... Se hace un repaso de algunas proposiciones y propiedades resueltas por Arquímedes y Pappus.

En el primer capítulo se establecen las definiciones, axiomas y propiedades que constituirán la base **(CEM2)** sobre la que se desarrollarán los capítulos posteriores. Se parte del estudio del movimiento uniforme, así como los conceptos de fluir y de fluente, a partir de los que se establece qué se entiende por fluxión (d):

En Géométrie nous concevons que les quantités sont accrues ou diminuées, ou totalement produites par le mouvement, ou par une fluxion continue analogue au mouvement. La quantité ainsi produite est dite *fluer* & le nomme *fluente*.⁵⁷ (MacLaurin, 6).

Estos conceptos se aplican al estudio de la variación de objetos geométricos, y de esta forma se establece que:

Les lignes son produites par le mouvement des points ; les surfaces par le mouvement des lignes ; les solides par le mouvement des surfaces, les angles par la rotation de leurs côtes, en supposant toujours l'écoulement du tems uniforme. La vitesse avec laquelle une ligne flue est la même que celle du point qui est supposé la décrire ou la produire. La vitesse avec laquelle la surface flue est la même que celle d'une ligne droite donnée, laquelle se mouvant parallèlement à elle-même produit un rectangle qui est toujours égal à cette surface...⁵⁸ (MacLaurin, 6-7)⁵⁹

De la misma forma se define la velocidad a la que fluye un sólido a partir de una superficie plana que produce un prisma o un cilindro, a la que fluye un ángulo a partir de un arco que forma un círculo.

alejado del método de los Antiguos que será más fácil para el autor en los comienzos y que podrá servir para resolver las dificultades que se han objetado contra este método.

⁵⁶ El método de ecuación o de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. Se utilizaba para demostrar que un área o un volumen que se está investigando es igual a una magnitud conocida, siendo el camino que se utilizaba el de considerar el área como formada por un número infinito de líneas paralelas.

⁵⁷ En Geometría concebimos que las cantidades son aumentadas o disminuidas, o totalmente producidas por el movimiento, o por una fluxión continua análoga al movimiento. La cantidad así producida se dice que fluye y se llama Fluente

⁵⁸ Las líneas son producidas por el movimiento de los puntos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de sus lados, suponiendo siempre el flujo en tiempo uniforme. La velocidad con la que una línea fluye es la misma que la del punto que se supone que la describe o la produce. La velocidad con la que la superficie fluye es la misma que la de una línea recta dada, que se mueve paralelamente a sí misma produciendo un rectángulo que siempre es igual a la superficie.

⁵⁹ Aunque esta cita pertenece al libro de MacLaurin hemos encontrado una similar en el libro de Isaac Newton *Philosophiæ Naturales principia mathematica*: "...supposit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum pactorum, superficies per motum linearum & solida per motum superfierum, angulos per rotationem laterum, tempoa per luxium continuum & sic in cæteris" (Tomo 1, p. 81, nota al pie 137)

La vitesse, avec laquelle une quantité flue, à chaque terme du tems pendant lequel est supposée se former, se nomme *fluxion*, qui est, par conséquent, toujours mesurée par l'increment ou le decrement que ce mouvement auroit produire dans un tems donné, s'il avoit été continué uniformément depuis ce terme sans aucune accélération ou retardement : ou bien on peut la mesurer par la quantité qui seroit produite dans un tems donné par un mouvement uniforme, égal au mouvement générateur dans ce terme.⁶⁰ (MacLaurin, 7)

En un teorema se establece que para determinar una Fluxión hay que calcularla como límite de la razón de los incrementos de dos cantidades.

THEOREME XII

*La vitesse d'un mouvement qui est accéléré ou retardé continuellement, es en chaque term du tems, à la vitesse d'un mouvement uniforme, en une raison qui est toujours limite entre la raison des espaces parcourus par ces mouvemens en tems égaux avant ce terme, & la raison des espaces parcourus par les mêmes mouvement en tems égaux après ce terme*⁶¹. (MacLaurin, 41).

Y también se da la definición de segundas fluxiones.

Ainsi lorsque la Fluxion d'une quantité est variable, on peut la considerer elle même comme ne fluent qui peut avoir sa Fluxion, laquelle se nomme *seconde Fluxion* de cette quantité...⁶² (MacLaurin, 48)

El segundo y tercer capítulos están dedicados al cálculo de las fluxiones (**CEM3**) de algunas figuras planas rectilíneas como: paralelogramos de altura invariable, triángulos, rectángulos y curvilíneas como el caso del círculo. En el capítulo cuarto se introducen las segundas y las terceras fluxiones para el estudio de los sólidos. En el capítulo quinto se tratan las fluxiones de cantidades que están en progresión aritmética, y en el sexto se hace un tratamiento exhaustivo de las fluxiones de las cantidades logarítmicas, considerando diferentes casos posibles. Una de las aplicaciones del cálculo de fluxiones aparece en el capítulo sexto, en el que se aborda el tema del cálculo de tangentes, y se establecen los teoremas necesarios para poder calcular dichas líneas en cada caso. Se trata el tema de las superficies curvas en el capítulo siguiente. Los capítulos noveno y décimo describen el cálculo de las ordenadas máxima y mínima, así como el cálculo de los puntos de inflexión y retroceso, las asíntotas. Por último el capítulo once está dedicado al estudio de la curvatura de las líneas, a sus variaciones y las diferentes formas de intersección entre ellas. Se

⁶⁰ La velocidad con la que fluye una cantidad, en cada momento del tiempo según el cual se supone que está formada, se llama Fluxión, que es, como consecuencia, siempre medida por el incremento o el decremento que este movimiento tendría que producir en un momento dado. si él había sido continuo uniformemente desde ese momento sin ninguna aceleración o retardo; o bien podemos medir la cantidad que sería producida en un tiempo dado por un movimiento uniforme, igual al movimiento generado en este momento.

⁶¹ La velocidad de un movimiento que es acelerado o retardado continuamente, es en cada momento del tiempo, a la velocidad de un movimiento uniforme, en una razón que es siempre el límite entre la razón de los espacios recorridos por estos movimientos en tiempos iguales antes de ese momento, y la razón de los espacios recorridos por el mismo movimiento en tiempos iguales después de este momento.

⁶² Así siempre que la Fluxión de una cantidad sea variable, podemos considerarla como un fluente que puede tener su Fluxión y que se llama Segunda Fluxión de esta cantidad.

consideran diferentes tipos de curvas desde las cónicas hasta las de tercer orden, algunas especiales como la cicloide y se construyen tanto las caústicas por reflexión como por refracción. También se estudian algunas de las aplicaciones del cálculo de fluxiones en relación con el movimiento, la gravedad de los cuerpos, la inclinación de la órbita de la Luna,...

El libro es una traducción al francés del original escrito en inglés. Está dividido en dos libros uno dedicado al Método de Fluxiones, y el otro al cálculo sin utilizar dicho método y aparece en dos tomos distintos que no coinciden con la división por libros. En el primer tomo se incluyen los primeros nueve capítulos dedicados a establecer todas las proposiciones teóricas. En el segundo tomo están los cinco capítulos restantes del primer libro que tratan algunas aplicaciones prácticas de los resultados teóricos y el libro segundo completo. Cada capítulo aparece encabezado por la palabra CHAPITRE junto con el número que hace dentro del orden del texto en letras mayúsculas y de mayor tamaño, sin que con él se inicie una nueva página (**CEM4**). A continuación se incluye el título que da pie al texto que le sigue en letra cursiva. El desarrollo del texto está dividido en artículos numerados a los que se hace referencia, cuando es necesario, utilizando dicho número. Los elementos de los que está compuesto cada sección, aparecen centrados con letras mayúsculas y numerados DEFINITION, COROLLAIRE, PROPOSITION, REGLE, ADVERTISEMENT, EXEMPLES,... y el párrafo a que hacen referencia, está escrito con letra cursiva, salvo las que aluden a elementos geométricos, que aparecen en letra normal. Los conceptos también están en letra cursiva. Los márgenes del libro se utilizan para hacer referencia a figuras, artículos, cartas u otros documentos que tratan sobre el mismo tema que el texto al lado del que aparecen.

El libro contiene unas hojas desplegadas del tamaño de página y media con las gráficas numeradas. La zona de las gráficas está enmarcada con una línea doble, siendo la de fuera más gruesa. La parte más interior de dichas hojas está en blanco, de forma que se pueden leer las páginas anteriores en las que se hace referencia a dichas gráficas, manteniendo la hoja en la que están dibujadas desplegada.

3.2.4.- Representaciones.

3.2.4.1.- Descripciones.

El capítulo correspondiente a puntos críticos considera cuatro tipos diferentes de estos puntos: máximos, mínimos, puntos de inflexión y puntos de retroceso (**d**). Para cada uno de estos tipos de puntos se dan las correspondientes definiciones así como los criterios necesarios para poder establecer con claridad el tipo de punto que se está analizando en cada momento. En ningún caso se presentan problemas, ejercicios ni ejemplos que ilustren el cálculo de este tipo de ordenadas y su asignación a uno de los tipos considerados, a pesar que en el inicio se expone que esta es una de las cuestiones de mayor utilidad y más agradables en Geometría. Hace referencia al método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos, pero considera que el Método de Fluxiones perfecciona todo lo que se ha inventado en relación con la medida de las figuras, la determinación de las tangentes y la resolución de todo tipo de problemas relacionados con los máximos y mínimos. Este

método es, por lo tanto, considerado por MacLaurin como más fácil, expeditivo, útil que cualquier otro usado hasta ese momento.

A) Definiciones de puntos críticos de primera especies.

El texto inicialmente expone ciertas condiciones para la existencia de puntos extremos, en el sentido de que si una cantidad variable es tal que crece continuamente o decrece hasta desaparecer, no se puede encontrar ninguna magnitud que sea la más grande o la más pequeña, no hay lugar por lo tanto para este tipo de cuestiones. Pero si la cantidad es tal que el crecimiento o la disminución tiene una cierta cota, se puede presentar el problema de encontrar esa cantidad. Se está concibiendo una cantidad variable como sucesión de valores que varían con el tiempo, de forma que no se concibe la función como una entidad en si misma, sino como una colección de valores **(d)**.

La primera descripción que se aparece de los puntos máximos y mínimos ofrece una visión dinámica **(d)** del comportamiento de una variable en función del tiempo, por lo tanto, más relacionada con la Física que con la Geometría, como era el caso de l'Hôpital.

Lorsque pendant quelque tems, une quantité variable comence à croître jusques à un certain terme déterminable, & qu'ensuite il décroît, ou lorsqu'elle commence à décroître jusques à un pareil terme, & qu'ensuite elle croît; cette grandeur est regardée, à ce terme, comme un *maximum*, ou un *minimum*, sans faire attention à ses variations dans les autres parties du termes.⁶³ (p. 154)

Al hacer referencia a que sólo se realiza el estudio para ciertos términos de la variable, se está considerando el caso de máximos y mínimos relativos, para los que sólo interesa el comportamiento en un cierto entorno del punto en cuestión. La cantidad variable se asocia en el libro de MacLaurin con la ordenada de una curva, de esta forma:

L'ordonnée d'un point d'une courbe est un maximum, ou un minimum, lorsqu'elle est plus grande ou plus petite qu'aucune des autres points de la courbe, de part & d'autre, dans ses deux branches qui joignent ce point⁶⁴. (p. 154)

Se trata de la misma definición que la dada con anterioridad, salvo que hace referencia a una curva y, por lo tanto, a un contexto geométrico con el que está relacionada; es decir, en este caso, en lugar de comparar cantidades o valores de una sucesión, se comparan ordenadas relacionadas con una curva. Recordemos que en esta época la ordenada era considerada como la línea que une un punto de la curva con el eje de abscisas y es perpendicular a éste. Así el eje de las abscisas es considerado como la representación de diferentes momentos en el tiempo, las ordenadas como un valor en uno de dichos

⁶³ Siempre que durante algún tiempo, una cantidad variable comienza a crecer justo en un cierto término determinable y luego decrece, o comienza decreciendo hasta un término parecido y luego crece; esta magnitud es considerada como un máximo o un mínimo, sin tener en cuenta las variaciones en otras partes del término.

⁶⁴ La ordenada de un punto de una curva es un máximo, o un mínimo, si es más grande o más pequeña que otra ordenada que pueda tener otro punto de la curva, de una y de otra parte, en las dos ramas que se unen en el punto.

momentos y un punto de la curva como la asociación de ambas cosas. mientras que para l'Hôpital, la ordenada va dibujando la curva al variar la abscisa, es su traza. Resulta llamativo que MacLaurin divida la curva en dos ramas limitadas por el punto extremo, la forma de estas dos ramas **(d)** le va a permitir clasificar los máximos y mínimos en dos tipos:

- De primera especie si “la curva continúa inmediatamente después del punto”.
- De segunda especie si “la curva da media vuelta, o se refleja después de esta ordenada, y siempre que las dos ramas de la curva estén del mismo lado de la ordenada”.

Esta división se realiza para poder considerar todos las posibilidades conocidas de máximos y mínimos de forma que se puedan analizar independientemente, ya que algunos de los casos considerados no eran aceptados por algunos matemáticos de la época, de esta forma, al clasificarlos en dos especies **(d)**, se solventa tanto la cuestión de tener en cuenta todos los casos posibles, como la de no mezclar situaciones que puedan requerir análisis diferentes.

Primeramente, realiza el estudio de los máximos y mínimos de primera especie en los que la tangente es horizontal, que actualmente serían estudiados como aquellos en los que se anula la primera derivada.

On trouve les plus grandes & les plus petites ordonnées, dans de pareils cas, (qui sont les plus communs dans la résolution des Problèmes) en examinant quel terme la Fluxión de la courbe devient égale à celle de la base, ou en quelque terme la Fluxión de l'ordonnée s'évanouit⁶⁵, celle de la base étant donnée⁶⁶. p. 156.

En esta definición se puede observar la distinción que se hace entre el papel que deben jugar las ordenadas y el de las abscisas **(d)**. Podemos por lo tanto considerar dos tipos de Fluxiones, una relacionada con la curva, de forma que en los puntos extremos al tener tangente horizontal su variación será igual a la de la base (eje de abscisas), mientras que si se considera la variación de las ordenadas como tiene que pasar de positiva a negativa o viceversa, tendrá que ser nula en el punto en cuestión. Esta última fluxión como se indica en el texto depende de la base, es una variación de la ordenada respecto de la abscisa, lo que representamos actualmente por $\frac{d}{dx}$.

Asimismo se da un criterio para distinguir los máximos de los mínimos:

⁶⁵ Newton llama magnitudes evanescientes o que desaparecen a los límites a los que se aproximan las proporciones de magnitudes constantemente decrecientes.

⁶⁶ Para encontrar las ordenadas más grandes y las más pequeñas, en los casos parecidos (que son los más comunes en la resolución de estos problemas), hay que examinar en qué término la Fluxión de la curva se hace igual a la de la base, o en qué término la Fluxión de la curva se desvanece, estando dada la de la base.

Les plus grandes & les plus petites ordonnées, se distinguent l'une de l'autre plus généralement, en les comparant avec les ordonnées des parties contigues de la courbe, ou en supposant que la base AP croît & observant si la Fluxion de l'ordonnée PM est positive, avant que le point P arrive en D, & que devient négative après que P a passé D, ou si elle est d'abord négative, & ensuite positive. C'est un *maximum* dans le premier cas, & un *minimum* dans le second.⁶⁷ p.156.

El criterio equivale a que si se tiene un máximo, antes de él la función ha de ser creciente y posteriormente decreciente, y en el caso del mínimo justamente al contrario.

A continuación pasa a considerar otros máximos y mínimos de primera especie, en particular aquellos para los que la tangente coincide con la ordenada.

On découvre les maximum ou minimum de cette espece, en examinant à quel tems la Fluxion de la courbe devient égale à la Fluxion de l'ordonnée, ou (ce qui revient au même) la Fluxion de la base s'évanouit, celle de l'ordonnée étant donnée⁶⁸. p. 157.

Se puede constatar, a la vista de los dos criterios, el paralelismo utilizado para describir el comportamiento de las variaciones de las abscisas y las ordenadas **(d)**.

Por último aclara que, si tenemos un máximo o un mínimo, la Fluxión de la base o de la ordenada es nula, pero no se puede establecer la implicación en el sentido contrario, es decir, si alguna de las dos Fluxiones son nulas, no podemos asegurar que el punto sea un máximo o un mínimo. Por ejemplo, si tenemos un punto de inflexión en el que la tangente es horizontal, por lo tanto la Fluxión es nula, los puntos de un lado del punto de inflexión tendrán una ordenada mayor que la suya y del otro menor, luego no es ni un máximo ni un mínimo.

Por medio de una proposición establece el criterio más general **(d)** que permite distinguir entre los diferentes puntos críticos, es decir, si son máximos y mínimos o si son puntos de inflexión.

*La Fluxión de la base étant donnée, & la courbe étant continuée des deux côtés de l'ordonnée, lorsque la premiere Fluxión de l'ordonnée, & ses Fluxions d'un nombre quelconque d'ordres succesivs s'évanouissent, l'ordonnée est un maximum ou un minimum, ou elle passe par un point d'inflexion, selon que ce nombre est pair ou impair.*⁶⁹ p.164

⁶⁷ Las ordenadas más grandes y las más pequeñas se distinguen al comparar las ordenadas de las partes contiguas de la curva, suponiendo que la base crece y observando que la ordenada PM es positiva antes de que el punto P llegue a D, y que se hace negativa después de que P pase D, o si antes es negativa y después positiva. Es un máximo en el primer caso y un mínimo en el segundo.

⁶⁸ Descubrimos los máximos o mínimos de esta especie, examinando en qué momento la Fluxión de la curva se hace igual a la Fluxión de la ordenada, o (lo que es lo mismo) la Fluxión de la base se desvanece, dada la de la ordenada.

⁶⁹ Si la Fluxión de la base está dada y la curva es continua por los dos lados de la ordenada, siempre que la primera Fluxión de la ordenada y cierto número de Fluxiones de órdenes sucesivos se desvanecen, la ordenada es un máximo o un mínimo, o pasa por un punto de inflexión, según que ese número sea par o impar.

Si el número de Fluxiones que se anulan, sin contar la primera, es cero o un número par, se obtiene un máximo o un mínimo, y si es impar, se trata de un punto de inflexión. Para demostrar la proposición anterior hace uso de una curva y su curva derivada (**d**), si la curva tiene un máximo o un mínimo, la derivada corta a la base, con lo que su ordenada será nula. Sustituyendo la curva por su derivada y construyendo la segunda derivada, si la curva inicial tenía un punto de inflexión, la primera derivada tendrá un punto máximo o mínimo en el que la curva derivada segunda cortará a la base, por lo que la segunda Fluxión se anulará. Continuando con este razonamiento se distinguen los casos en que se anulen las Fluxiones pares o las impares a partir de la primera.

B) Definición de puntos críticos de segunda especie.

Pasa a considerar brevemente los puntos críticos de segunda especie, es decir, funciones tales que la curva derivada tiene dos ramas, y por lo tanto en el punto crítico posee una asíntota. Si las dos ramas están en diferentes lados respecto de la base, el punto es un máximo o un mínimo, y si las dos ramas están del mismo lado de la base, se trataría de un punto de inflexión. Está claro que en ambos casos la Fluxión de la ordenada es igual a infinito y la tangente en el punto es perpendicular a la base. La Fluxión de la base se desvanece al compararla con la de la ordenada, y en el primer caso la Fluxión de la ordenada pasa de ser positiva de un lado a negativa del otro, luego será un máximo o un mínimo. Para analizar el comportamiento de una curva y sus curvas derivadas en un punto de inflexión, se incluye la proposición siguiente, como otra posible caracterización de este tipo de puntos (**d**), relacionando el posible punto de inflexión de una curva, con los máximos y mínimos de su derivada primera y, por lo tanto, con los cortes con el eje OX de su derivada segunda.

L'ordonnée rencontre la courbe dans un point d'Inflexión, lorsque sa Fluxión est un maximum ou un minimum, celle de la base étant donnée, & la courbe étant continuée des deux côtés de l'ordonnée⁷⁰. p. 166.

El razonamiento de esta proposición se basa en que las ordenadas de la curva derivada crecen cuando la curva tiene un arco convexo hacia la base y decrecen cuando el arco es cóncavo hacia la base, es decir, la ordenada del punto de la curva derivada será un máximo o un mínimo si el punto correspondiente de la curva de partida es un punto de inflexión. Como corolario de esta proposición se indica que como se han considerado diferentes tipos de máximos y mínimos también habrá diferentes tipos de puntos de inflexión. Esto va a permitir clasificar estos puntos para diferentes curvas, así si llamamos E al punto de la curva inicial y e al punto correspondiente de la curva derivada, se pueden considerar los siguientes casos:

- Si E es un punto de la curva para el que se anulan la primera y la segunda derivada, de forma que la primera derivada tenga en él punto correspondiente (e)

⁷⁰ La ordenada de una curva es un punto de inflexión, siempre que su Fluxión es un máximo o un mínimo, estando la de la base dada, y la curva siendo continua de los dos lados de la ordenada.

un punto de inflexión, entonces no hay cambio en la curvatura de la curva inicial y, por lo tanto, E no es un punto de inflexión. (fig. 3.28)

- Si e es un punto de inflexión para el que la tangente es vertical, entonces E tampoco es un punto de inflexión y la concavidad o convexidad de la curva hacia la base vendrá determinada según si el arco correspondiente de la curva derivada crece o decrece. (fig. 3.28).

C) Puntos de retroceso.

El último tipo de puntos considerados es el correspondiente a los puntos de retroceso los cuáles se identifican de la forma siguiente: si los dos arcos de la curva determinados por el punto E están del mismo lado respecto de la ordenada DE y el punto E tiene una tangente distinta de DE, E es un punto de retroceso (fig. 3.31). Para clasificar estos puntos se hace referencia al libro de l'Hôpital en el que se considera que los puntos de retroceso pueden agruparse en dos especies: de primera especie son aquellos para los que la curvatura de ambos arcos es opuesta y de segunda especie, cuando tienen la misma curvatura (fig. 3.32).

3.2.4.2.- Gráficas

Para representar gráficamente los diferentes puntos críticos utiliza distintas curvas y su representación cartesiana, de forma que proporciona una visión global del comportamiento de dicha función en las cercanías de punto. Pueden ser, por tanto, consideradas como **ideogramas (g)** según la clasificación que hemos establecido de las gráficas. Esta representación⁷¹ es similar a la descrita en relación con el libro de l'Hôpital; el origen de coordenadas está sobre un eje horizontal y es designado mediante la letra A. En dicho eje, que suele denominarse base (por semejanza y alusión a la base de las figuras geométricas planas para las MacLaurin considera también su Fluxión), se representan las abscisas (coupées), normalmente designadas mediante las letras AP, sobre dicho eje se levantan segmentos verticales (perpendiculares a la base) que representan las ordenadas (ordonnées) y que se designan por las letras PM. Las únicas ordenadas que se designan utilizando otra letras, son las correspondientes a los puntos críticos, probablemente para distinguirlas y resaltarlas del resto, usándose en este caso DE. Asimismo, en dichos puntos críticos se incluye la representación de la recta tangente mediante una línea ET.

A) Gráficas cartesianas de los puntos críticos en las que se relacionan dichos puntos con su recta tangente.

Entre los ideogramas utilizados para representar los puntos críticos, tenemos los correspondientes a aquellos en los que la tangente es horizontal (**g**) y, por lo tanto, paralela a la base, siendo uno de ellos el correspondiente a un máximo y el otro, a un mínimo:

⁷¹ En los gráficos que hay a continuación, se pueden observar las normas descritas y utilizadas en todas ellas.

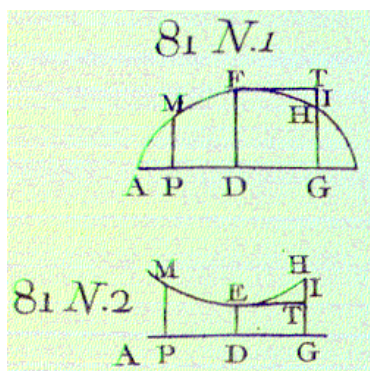


Fig. 3.21 Máximo y mínimo con tangente horizontal

En otros la tangente es vertical y por lo tanto perpendicular **(g)** a la base coincidiendo con la ordenada, también se incluyen ambos casos, el correspondiente al máximo y el del mínimo.

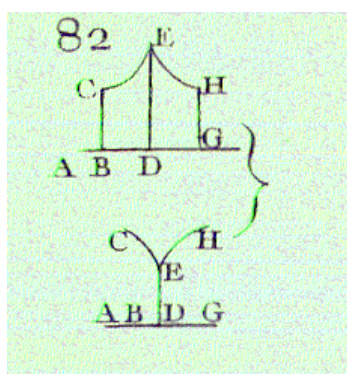


Fig. 3.22 Máximo y mínimo con tangente vertical.

Por último, se consideran los diferentes casos de puntos de retroceso **(g)**, es decir, cuando la curva tiene dos ramas del mismo lado de la ordenada DE. La primera de las gráficas corresponde al caso en que una de las ramas tiene dos puntos comunes con la ordenada, en la segunda sólo tiene un punto común con la ordenada, ambas ramas tienen curvatura opuesta y la tangente TE en el punto es horizontal, y la última se diferencia de la segunda en que la curvatura de las dos ramas es la misma.

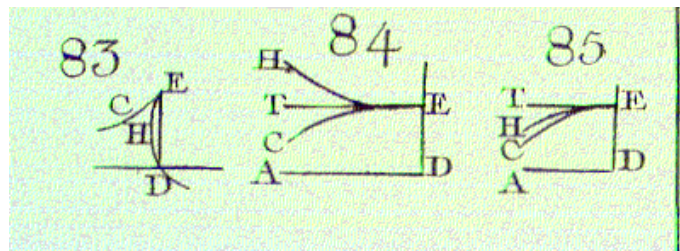


Fig. 3.23 Puntos de retroceso

Otras gráficas se utilizan como apoyo (**g**) a las demostraciones, tanto para poder seguir el razonamiento utilizado, como para visualizar las relaciones que se pueden establecer entre las diferentes figuras geométricas que surgen, y poder utilizar dichas relaciones en las deducciones que constituyen los razonamientos. La siguiente proposición y la figura correspondiente, se utilizan para identificar, en un gráfico cartesiano, las distintas fluxiones que asocia MacLaurin con una curva: la fluxión de la base EI, la Fluxión de la ordenada IT y la fluxión de la curva ET (la recta tangente).

PROPOSITION XIV

188. Que *ET* soit tangente de la courbe *FE* en *E*, & que *EI*, étant parallèle à la base *AD*, *IT* soit parallèle à l'ordonnée *ED* : les Fluxions de la base, de l'ordonnée & de la courbe seront mesurées par les droites *EI*, *IT*, & *ET* respectivement. (p. 123, fig. 47).

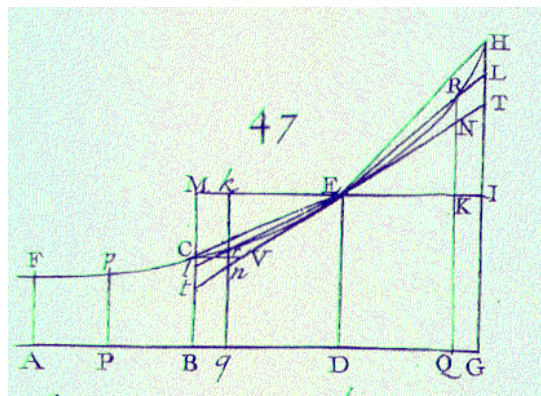


Fig. 3.24 Triángulo diferencial

Hemos incluido la demostración⁷² de esta proposición, sobre la que se basan la mayor parte de las proposiciones siguientes, para mostrar el significado que se le da al

⁷² Que l'arc CEH soit convexe vers la base. Laquelle étant supposée fluer uniformément, les ordonnées croîtront d'un mouvement uniformément accéléré ... il fluit du premier & seconde Axiome, que dans le tems que la base acquiert l'increment DG, le mouvement, par lequel l'ordonnée DE flue, étant continué uniformément, produiroit une ligne moindre que IH, mais plus grande que MC. Donc si cette ligne n'est pas

triángulo diferencial y el tipo de demostración que se utiliza, totalmente geométrica, basada en relaciones y razones entre magnitudes. El razonamiento se hace en dos partes, una a la derecha del punto que se está estudiando y otra hacia la izquierda, de una forma totalmente especular.

B) Gráficas de puntos críticos de primer orden que se relacionan con los correspondientes puntos de la gráfica de la función derivada.

Resulta sorprendente que en estas gráficas, que son cartesianas, además de representar la curva AEM, que se utiliza como ejemplo, sobre la que se demuestra el enunciado, se representa sobre ella **(g)** su curva derivada FDN, lo que permite comparar resultados o comportamientos de una con enunciados o comportamientos sobre la otra. Este es el caso de la gráfica siguiente que se utiliza para demostrar, que si una ordenada es máxima o mínima, entonces la Fluxión en ese punto se desvanece, es decir, la curva derivada corta a la base:

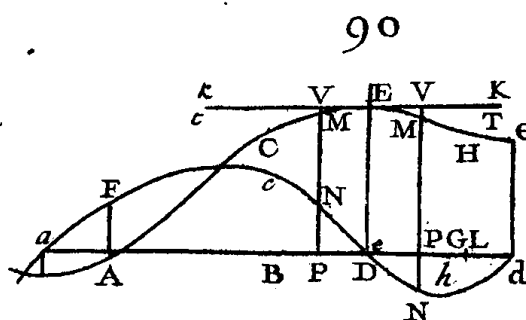


Fig. 3.25 Curva con un máximo y curva derivada.

La curva de partida es la representada por la línea AEH, estando sus ordenadas denominadas por las letras PM, como viene siendo habitual la curva derivada es la determinada por los puntos Fch y sus ordenadas representadas por PN. La ordenada máxima es DE, siendo su recta tangente tET, que es paralela a la base, con lo que la correspondiente ordenada de la curva derivada De se confunde con el punto D de la base. El corte de la ordenada PM con la tangente en el punto extremo se ha llamado V, de esta forma para caracterizar un punto máximo a partir de la curva inicial, se establece que VM

égale par IT, saisons-la égales à quelque ligne IL moindre que IH, mais plus grande que IT. Joignons EL qui rencontrera la courbe en quelque point R entre E & H ; que l'ordonnée RQ rencontre la tangente en N, la base en Q & la droite EI en K. Puisque IL est à KL, comme EL, est à ER, ou comme DG est à DQ, & que le mouvement générateur étant uniforme, les quantités produites sont en même raison que les tems ; il fuit que si le mouvement, avec lequel l'ordonnée DE flue, étoit continuée uniformément . il produiroit la ligne KR dans le même tems que la base acquiert l'incrément DQ. Mais parce que la ligne KR es produite par le mouvement accéléré avec lequel l'ordonnée flue, dans le même tems que la base fluant uniformément acquiert l'incrément DQ, il fuit, du premier Axiome, que le mouvement, par lequel l'ordonnée DE flue, étant continuée uniformément, produiroit une moindre ligne que KR dans ce tems-là : ce qui étant contradictoire, il fuit que la ligne qui auroit été produire par le mouvement avec lequel l'ordonnée DE flue continué uniformément pendant que la base acquiert l'incrément DG, n'est pas plus grand que IT. (p. 123).

debe estar comprendido desde V hacia P, tanto a un lado como a otro del punto máximo (g). Por el contrario, para caracterizar un máximo a partir de la curva derivada, se establece que la ordenada PN de dicha curva pasará de estar por encima de la base (positiva) o estar por debajo (ser negativa) (g).

De forma similar se utiliza una gráfica de características parecidas en relación con descripción del comportamiento de la curva y de su curva derivada cuando el punto es un punto de inflexión:

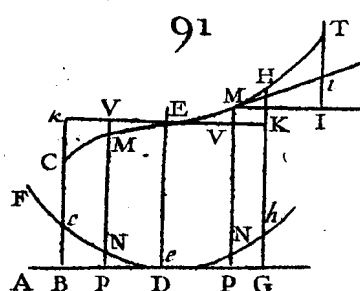


Fig. 3.26 Curva con punto de inflexión y curva derivada

En este caso, el punto de inflexión corresponde a la ordenada DE y para caracterizarlo en función de la curva inicial se establece que el segmento VM debe de estar de diferente lado (uno por debajo y otro por encima) en los puntos, a la izquierda y a la derecha del punto de inflexión (g). Utilizando la curva derivada para describir el comportamiento que debe tener un punto de inflexión, se asegura que la curva derivada debe cortar a la base en el punto D y a ambos lados de D la curva debe de permanecer del mismo lado respecto de la base, por encima si la curva inicial es creciente y por debajo si es decreciente (g). Recordemos que las curvas utilizadas representan el fluir de una cantidad en función del tiempo⁷³, con lo que todos los razonamientos se hacen de izquierda a derecha, y para indicar lo que ocurre en un determinado momento, se compara primero con lo que ha ocurrido antes y con lo que es previsible que ocurra después (d).

Estas dos gráficas se utilizan en la demostración de otras proposiciones (g) para poder seguir los razonamientos, por ejemplo, se utiliza en la que establece que un punto es un máximo o un mínimo si la cantidad de Fluxiones que se anulan a partir de la de primer orden, es un número par, y si el punto es de inflexión, entonces es un número impar.

⁷³ 12. Le tems est représenté par une ligne droite qui flue uniformément, ou qui est décrire par un mouvement uniforme ; & le moment ou terme du tems est représenté par un point, ou par le terme ou extrémité de cette ligne. La vitesse donnée est représenté par une ligne donnée, la même qui auroit été décrite par cette vitesse dans un tems donnée. La vitesse accélérée ou retardée est représentée par une ligne qui croît ou décroît en même proportion. Les tems d'un mouvement étant représenté par la base d'une figure & un partie du tems par une partie correspondante de cette base ; si la ordonnée sur un point quelconque de cette base est égale à l'espace qui auroit été parcouru dans un tems donné par la vitesse au terme correspondant du tems continuée uniformément ; cette vitesse sera représentée par cette ordonnée correspondante. Les Fluxions des quantités sont représentées par les incremens ou décremens qui les mesure. (pp. 7-8) .

Otra relación que se establece a partir de una curva y su curva derivada, se representa en las dos gráficas siguientes que permiten visualizar que, cuando una curva tiene un punto de inflexión, su curva derivada tiene un máximo o un mínimo (g).

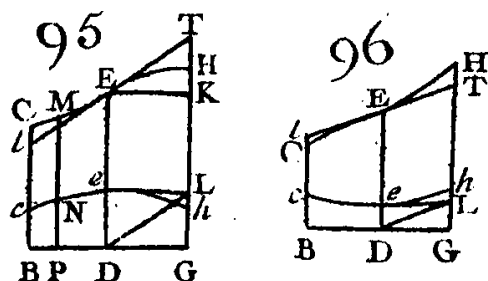


Fig. 3.27 Puntos de inflexión correspondientes a un máximo y un mínimo de la curva derivada respectivamente.

En la primera gráfica se puede ver que si en la curva inicial pasa de ser convexa hacia la base (CE) a ser cóncava hacia la base (EH), los correspondientes arcos de la curva derivada pasan de ser crecientes (ce) a ser decrecientes (eh) y, por lo tanto, dicha curva derivada tiene en el punto e un máximo. En cambio, si la curva inicial pasa de ser cóncava hacia la base (CE) a ser convexa hacia la base (EH), los correspondientes arcos de la curva derivada pasan de ser decrecientes (ce) a ser crecientes (eh) y, por lo tanto, la curva derivada tiene en e un punto mínimo.

Seguidamente representa otras posibilidades de relación entre ambas curvas, en primer lugar considera la situación en que la derivada tenga en e un punto de inflexión considerando dos casos: que la tangente en e sea horizontal o vertical. En cualquiera de esos casos el punto E no será ni máximo, ni mínimo, ni punto de inflexión ya que la concavidad de las curvas de partida se mantiene igual, antes y después del punto E.

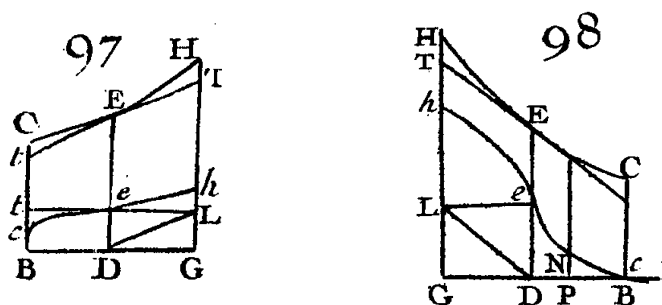


Fig. 3.28 Puntos de inflexión que no corresponden a máximos y mínimos de la curva derivada.

Debemos llamar la atención acerca del rectángulo DGeL que aparece en estas dos gráficas cuya diagonal DL se utiliza para establecer la pendiente de la recta tangente en el punto E, en la siguiente gráfica se muestra el procedimiento por el que se puede utilizar este hecho que se basa en la consideración de que: el segmento DG es la Fluxión de la base (que está dada), la Fluxión de la ordenada es KT, la fluxión del área de ADeF (área bajo la curva inicial) es el rectángulo eG, y suponiendo que el área anterior es igual a la del rectángulo EG sus fluxiones serán iguales, como KT es igual a De, la tangente ET, será paralela a DL.

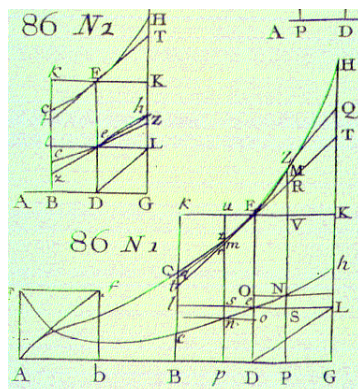


Fig. 3.29. La tangente ET es paralela a la diagonal DL del rectángulo DGeL

Este resultado se utilizará repetidamente en las diferentes demostraciones que hace MacLaurin acerca de las proposiciones y teoremas que incluye en su libro.

C) *Gráficas de puntos críticos de segunda especie que se relacionan con los puntos correspondientes de la gráfica de la función derivada.*

Igualmente se utilizan estas gráficas para representar los máximos, mínimos y puntos de inflexión que se han clasificado como de segunda especie. Se puede observar que en estos casos las curvas derivadas están formadas por dos ramas y que poseen una asíntota (tangente vertical) (g):

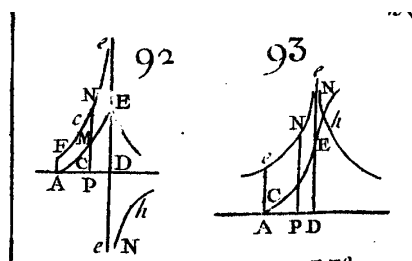


Fig. 3.30 Puntos críticos con tangente vertical

En las gráficas anteriores se representa tanto la curva como su curva derivada. La coordenada del punto crítico, igual que en otras ocasiones, es DE siendo en ambos casos la

tangente a la curva en este punto vertical. En la gráfica de la izquierda las dos ramas de la curva derivada están de diferente lado respecto de la base con lo que la ordenada DE se considera un punto máximo o mínimo (ya que la derivada pasa de positiva a negativa o viceversa). En la otra gráfica, como las dos ramas de la curva derivada están del mismo lado de la base (son ambas positivas), la curva de partida es siempre creciente y lo único que ha variado ha sido la concavidad y, por lo tanto, el punto es de inflexión.

D) Gráficas correspondientes a los puntos de retroceso.

En las siguientes gráficas trata de presentar las posibles situaciones para tener un punto de retroceso en E, siendo la tangente en ese punto horizontal y, por lo tanto, paralela a la base. Primeramente clasifica dichos puntos según la curvatura de las dos ramas de la curva a partir de ellos (**g**), y distingue si las dos ramas tienen diferente curvatura y, por lo tanto, están de diferente lado de la tangente en E, llamándolos de primera especie (figs. 99), o si tienen la misma curvatura y están del mismo lado respecto de la tangente que serán los de segunda especie (figs. 100). Respecto de ambas especies, establece dos casos, según que la curva derivada esté formada por un arco continuo en e, o que ese punto vuelva a ser un punto de retroceso. Para los puntos de primera especie tendremos, por lo tanto, las siguientes gráficas:

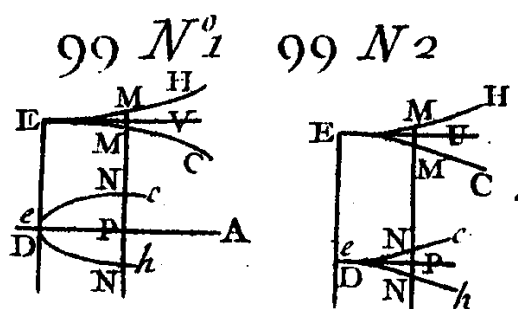


Fig. 3.31 Puntos de retroceso de una curva cuyas ramas tienen diferente convexidad

Y para los puntos de segunda especie tendremos de forma paralela la siguiente gráfica:

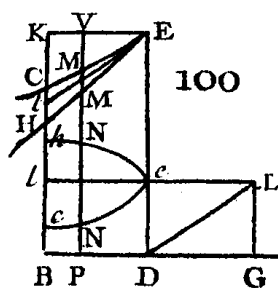


Fig. 3.32. Punto de retroceso de una curva cuyas dos ramas tienen la misma convexidad.

De esta manera, se han considerado y clasificado todas las posibilidades respecto de los diferentes puntos críticos, sus posiciones, tangentes y relaciones con la correspondiente curva derivada,...

3.2.5.- Conclusiones.

3.2.5.1.- Análisis socio-cultural.

- CIA1: Esta obra fue escrita en Inglaterra como respuesta a un ataque del obispo Berkeley al método de Newton relativo a las fluxiones. Su primera edición fue en 1749 y resulta sorprendente que fuera traducido al francés, como es el caso de la libro analizado, cuando en Europa imperaba el método leibniziano.
- CIA2: El autor se formó en matemáticas en Glasgow y ya desde los diecinueve años fue profesor primero en Aberdeen y después en la Universidad de Edimburgo.
- CEM1: La estructura del texto es la clásica utilizada por los griegos en la que, a partir de unas definiciones iniciales sobre las que se constituye el resto de la obra se van demostrando diferentes proposiciones y teoremas, utilizando exclusivamente el método de demostración establecido por los griegos, ya que MacLaurin considera que es el único admisible y, por tanto, el que puede refutar los razonamientos del obispo. Es decir, no es un libro más sobre técnicas del Cálculo sino que se trata de un esfuerzo por establecer la materia sobre unas bases análogas a la Geometría de Arquímedes.
- d: No se hace alusión a ningún tipo de aplicación, es decir, se constituye el Cálculo esencialmente estableciendo la estructura matemática que posee. De todas formas hay que tener en cuenta que la base está constituida por el estudio del movimiento uniforme de los que se obtienen los conceptos de fluir y fluente, a partir de los que se establece lo que se entiende por Fluxión. Es decir, las magnitudes con las que se está trabajando en el libro son relativas al espacio y al tiempo.

3.2.5.2.- Análisis epistemológico.

- CIA1: La formación recibida por el autor y el entorno en el que se produjo, condujo a éste a decantarse hacia las propuestas de Newton a pesar del rechazo que había en el continente y los avances que se habían hecho a partir de los métodos elaborados por Leibniz.
- CIA4: Las aportaciones de esta obra son: intentar fundamentar el Cálculo de Fluxiones en los métodos propios de la Geometría griega, desarrollar y divulgar este tipo de cálculo, e incorporar el desarrollo en serie de una función en el origen, que es conocido con el nombre de MacLaurin porque fue el que divulgó este desarrollo, a pesar de haber sido publicado con anterioridad.

- CEM3: Se estudia a partir de las nociones de fluente y fluxión, la variación de algunas figuras conocidas (rectángulo, elipse, prisma, cono,...) de las que se obtienen las fórmulas correspondientes y se establecen algunas aplicaciones en el estudio de las líneas curvas como las referentes al cálculo de tangentes, puntos máximos y mínimos, de inflexión y de retroceso, así como el análisis de la curvatura.
- d: Los conceptos se constituyen a partir de la noción de fluxión relativa al estudio de la variación de las cantidades que aumentan o disminuyen en función de tiempo, con lo que se puede considerar como cantidades de tipo físico más que geométrico. Se está concibiendo una cantidad variable como una sucesión de valores que varían con el tiempo, con lo que se puede considerar que hay un fondo aritmético en la concepción de la variación y ofreciendo, por lo tanto, una visión dinámica del comportamiento de una variable en función del tiempo.

Al considerar que las magnitudes son el tiempo y el espacio, aunque una dependa de la otra se puede considerar tanto la fluxión de una como la de la otra, es decir, se pueden intercambiar los papeles de la variable independiente y los de la dependiente. Esta flexibilidad en la concepción de fluxión se ha perdido actualmente siendo bastante más rígida y asignándose la categoría de variable independiente casi exclusivamente a la variable x (o el tiempo).

Se clasifican los puntos críticos en máximos, mínimos, puntos de inflexión y puntos de retroceso, considerando que el método de Fluxiones es el más adecuado para abordar los problemas en los que están involucrados este tipo de puntos. Además considera que estos puntos se pueden organizar en dos grupos: los de primera especie y los de segunda especie.

Se llegan a establecer los métodos más completos y generales para caracterizar los puntos críticos.

Los métodos geométricos son tan fuertes que se llegan a establecer las nociones relativas a los puntos críticos relacionándolos con las propiedades que tienen que tener en su fluxión (en la nomenclatura actual, la función derivada).

- e: No se incluyen expresiones simbólicas, lo cual resulta razonable por el enfoque que se ha elegido del tema al intentar fundamentarlo en la Geometría griega.

3.2.5.3.- *Análisis didáctico.*

- CIA3: El libro se ha estructurado en el sentido de que pueda ser fundamentado el Cálculo sobre unas bases análogas a la Geometría de los antiguos matemáticos griegos.

- CEM2: En el primer capítulo se establecen las definiciones, axiomas y propiedades que constituirán la base sobre la que se desarrollan los capítulos posteriores.
- CEM4: El libro está escrito en francés aunque la edición original está en inglés. Está dividido en dos libros de forma que en el primero se establecen todas las proposiciones teóricas y en el segundo, las aplicaciones prácticas. La utilización de la numeración para los artículos de forma que se pueda hacer referencia a ellos a lo largo del texto es característica de los libros de matemáticas. Los conceptos aparecen en cursiva para resaltarlos respecto del resto del texto y los márgenes se utilizan para completar la información que se ofrece en el grueso del texto. Como en el libro de l'Hôpital, se incluyen páginas desplegables con gráficos relativos a los conceptos y aplicaciones desarrollados en el texto.
- d: Los puntos críticos se presentan como conceptos geométricos en los que se relaciona su posición con las posiciones en los puntos próximos ofreciéndose una visión dinámica de dichos puntos enfatizada por la relación que se establece con el movimiento uniforme.
- g: Las gráficas que hay en el texto son ideogramas que clasifican los puntos críticos según la posición que tienen y los relacionan con otras características de las curvas. Se caracterizan por la existencia de una tangente horizontal paralela a la base, o vertical, y por lo tanto, perpendicular a la base.

Las gráficas se utilizan como apoyo a las demostraciones, tanto para poder seguir el razonamiento utilizado como para visualizar las relaciones que se pueden establecer entre las diferentes figuras geométricas que surgen, y poder utilizar dichas relaciones en las sucesivas deducciones que constituyen dichos razonamientos.

Se clasifican los puntos de retroceso tanto por la curvatura de las ramas como por su posición.

Resulta sorprendente la comparación que establece MacLaurin entre una curva y su fluxión o curva derivada y que se aplica a los puntos críticos estableciendo, por ejemplo, que cuando se tiene un máximo, la fluxión pasa de estar por encima a estar por debajo de la base, o que respecto del punto de inflexión la fluxión debe de permanecer del mismo lado de la base.

3.3.- *Institutiones Calculi Differentialis* de Leonhard Euler (1755).

3.3.1.- Ficha de referencia de la obra.

Autor: Leonhard Euler

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: 1707-1783.

Título: Institutiones calculi differentiat. Series Prima. Opera Mathematica. Volumen decimun

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1755, Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1913

Localización del manual utilizado: Biblioteca General de la Universidad de Salamanca. MT/51 EUL ope.

3.3.2.- Contextualización e intencionalidad del autor.

El puesto más relevante de la matemática del siglo XVIII pertenece por derecho propio a un alumno de Jean Bernoulli (CIA2) nacido en Basilea, Euler. A la edad de veinte años fue requerido por Nikolaus y Daniel, hijos de su maestro, y se trasladó a San Petersburgo para trabajar en la Academia de esta ciudad, fundada pocos años antes por Catalina I. Surgiría allí un núcleo matemático muy importante dirigido por el propio Euler al que se debe el increíble número de más de 860 obras originales y un gran número de destacados textos de divulgación, tanto de matemáticas como en aplicaciones de matemáticas. A los 30 años empezó a publicar una serie de libros de texto dedicados al cálculo infinitesimal y sus aplicaciones. Euler continuó su trabajo durante su estancia en Berlín (1741-1766) y durante un segundo periodo en Rusia. Se puede decir que la concepción de libro de texto de matemáticas, que comienza con los fundamentos de la materia y culmina, tras una exposición sistemática, con las líneas recientes de investigación, fue ideado precisamente por Euler (**CEM1**). En 1734-36 Euler inaugura una serie de libros de texto con una *Mecánica* en dos volúmenes, escrita completamente sobre la base del cálculo infinitesimal. Siguieron una *Aritmética* (impresa en 1738) y una obra sobre la *Navegación* (impresa en 1749). Al periodo berlinés pertenece un libro de texto acerca del cálculo de las trayectorias de los planetas y cometas (aparecido en 1744); y siguieron luego tres libros dedicados al cálculo infinitesimal (**CIA1**): la *Introductio in Analysin Infinitorum* (Introducción al análisis de las magnitudes infinitamente pequeñas, dos volúmenes, escrito en 1745, impreso en 1748), las *Institutiones calculi differentialis ...* (Iniciación al cálculo diferencial..., escrito en 1748, publicado en 1755) e *Institutiones calculi integralis ...* (Iniciación al cálculo integral... elaborado en 1763 y publicado entre 1768 y 1770 en tres partes). Gran parte de sus libros fueron escritos en latín y francés a pesar de ser el alemán su lengua materna, en particular los libros de texto fueron escritos en latín.

La *Introductio in Analysin Infinitorum* supone el nacimiento del Análisis Matemático ya que en él reúne todo lo que se supone necesario para abordar con éxito el cálculo infinitesimal: el concepto de función, la clasificación y operaciones con funciones, los desarrollos de funciones y series infinitas, las funciones de varias variables, la función

exponencial y el logaritmo y sus desarrollos en serie, las funciones trigonométricas y sus relaciones entre sí, así como la relación entre las funciones trigonométricas y las exponenciales vía los números complejos, fracciones continuas, etc. En el segundo volumen, Euler da una clasificación de las curvas y de sus propiedades: cónicas, asíntotas, curvas de tercer y cuarto orden, transformaciones de coordenadas, superficies y sus propiedades, etc. Como se puede deducir, Euler considera el concepto de función como objeto de estudio del Análisis utilizando para ello argumentos analíticos **(d)** en lugar de los geométricos utilizados hasta entonces.

En sus *Institutiones calculi diffetentialis* desarrolla una detallada teoría del diferencial en el sentido de diferencias, construyendo el cálculo diferencial como el cálculo que surge al hacer pequeñas las diferencias, aunque introduce un cambio en el cálculo leibniziano que lo aproxima a la interpretación de los *incrementos evanescentes* de Newton. Ante la eterna duda de qué eran los infinitesimales, Euler considera que lo esencial es saber como se comportan. Por tanto el Cálculo Diferencial consiste en el método de determinar las razones de los diferentes aumentos o incrementos de las funciones de una magnitud variable, cuando la variable de la que depende experimenta asimismo un incremento infinitesimal **(d)**. Las diferencias, tal y como son concebidas por Euler, son en última instancia nulas, pero ya que existen infinitos órdenes de magnitudes infinitesimales (todas ellas nulas), existen también razones de incrementos legítimas con significado geométrico, esto hace posible el cálculo infinitesimal. Los diferenciales dx y dy son importantes en cuanto que definen el **cociente diferencial** $\frac{dy}{dx}$, que puede ser determinado y que no se había utilizado en los libros anteriores, lo que supone una gran innovación **(CIA4)**. El cálculo es precisamente un método para determinar este cociente cuando los incrementos se desvanecen **(CIA3)**:

... un método para determinar la proporción de los incrementos evanescentes, estos que las funciones toman cuando la variable de la función se modifica por uno de tales incrementos.

Se está gestando la noción de derivada de una función, concepto que sustituirá a las diferenciales dx , dy , que ocupan los puestos de honor en el cálculo de Leibniz. Esta introducción de la derivada implica un cambio en la noción de función: cuando la función era pensada como una relación entre las variables x e y , los conceptos básicos eran los diferenciales dx , dy ; cuando la función empieza a pensarse como una aplicación que a un número x asocia otro $f(x)$, el concepto básico será la derivada **(CIA4)**. Este cambio que se iniciará con Euler, va a acercar los conceptos del cálculo diferencial de Leibniz a la idea de límite que luego servirá para fundamentarlo. El cálculo diferencial de Euler proporciona un moderno y atractivo aparato del cálculo infinitesimal de todos los órdenes, diferenciación de funciones algebraicas y trascendentes, resolución de ecuaciones diferenciales, diferenciación parcial, valores extremos, etc.

Tan actual como el anterior resultan ser las *Institutiones calculi integralis*, que revela de igual manera la maestría de Euler en el dominio de lo formal. Trata del cálculo integral entendiéndose como operación inversa de la diferenciación aunque todavía tuviera el sentido geométrico de área, pero la integración ya había perdido el carácter autónomo

que Leibniz defendió y que, cuando resurja de nuevo en el siglo XIX, dará lugar a las modernas teorías de la medida y la integración.

Los libros de Euler, escritos en el más puro estilo de la Ilustración, desempeñaron un papel destacado en la formación de la componente científica de la Ilustración.

3.3.3.- Caracterización y estructura de la obra.

La obra está dedicada al cálculo diferencial, que para Euler trata de:

Calculi differentialis, qui est methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur.⁷⁴ (p. 5)

El libro tiene 675 páginas y está dividido en dos partes: la “partis prioris” que tiene nueve capítulos (**CEM1**) y en ella se establecen todos los fundamentos de tipo teórico que se pueden aplicar posteriormente al desarrollo del cálculo diferencial:

In quarum priori iactis Calculi differentialis fundamentis methodum exposui omnis generis functiones differentiandi neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inveniendi, sive functiones unicam variabilem sive duas pluresve involvant⁷⁵. (p. 9)

Se inicia con las diferencias finitas y la aplicación a las series para pasar a las diferencias infinitas, las diferencias de cualquier orden, la diferenciación de funciones algebraicas de una sola variable, la diferenciación de las funciones trascendentes, la diferenciación de varias variables, otras fórmulas relativas a la diferenciación y las ecuaciones diferenciables (**CEM2**).

La segunda parte denominada “partis posterioris” contiene 13 capítulos y en ella se aplican los conceptos ya tratados a los conceptos relativos a las series:

In altera autem parte amplissimum huius calculi usum in ipsa Analysis finitorum ac doctrina serierum exposui; ubi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicavi. Du usu autem huius calculi in Geometria linearum curvarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, ut adeo prima Calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint peetita ad hancque scientieam, cum vix satis essent evoluta, summa cura applicata.⁷⁶ (p. 9).

⁷⁴ El Cálculo diferencial es el método para determinar las razones entre los incrementos que se desvanecen, para cualquier función que tomemos, de cantidades variables, que sean funciones, tributarias de incrementos evanescentes,

⁷⁵ En la primer se exponen los fundamentos del método para todo género de funciones se diferencia, no sólo las diferenciales de primer orden sino también se descubren las de orden superior, sea de funciones de una sola variable, sea de funciones que tienen varias.

⁷⁶ En la otra parte se amplía de esta manera los usos del cálculo en el mismo Análisis finito a la exposición de la doctrina sobre series; donde también se imprime la teoría de máximos y mínimos claramente explicada. Pero del uso del cálculo a la Geometría de líneas curvas nada hasta ahora se ha hecho, por lo que allí menos

Se tratan en esta parte, la teoría de series, su sumabilidad, la conversión de funciones en serie, los usos del cálculo diferencial a la formación de series, y a la resolución de ecuaciones diferenciales, los máximos y mínimos de funciones de una y de varias variables, el uso del cálculo diferencial a la investigación de las raíces reales e imaginarias de ecuaciones, al estudio de funciones que en algunos puntos son indeterminadas, la interpolación de series y el uso del cálculo diferencial a la resolución de fracciones (**CEM2**).

Al ser una reedición del texto original se utilizan técnicas de impresión propias de una época más reciente que aquella a la que corresponde este libro (**CEM4**). A pesar de ello se mantiene el idioma en que fue escrito el libro, en latín. No hay figuras ni elementos decorativos, tampoco se incluyen tablas ni gráficas correspondientes a las funciones utilizadas al pretender ser un fiel reflejo de la obra original de Euler. Los diferentes apartados están numerados y los términos específicos del cálculo diferencial se escriben en letra cursiva.

3.3.4.- Representaciones.

Al ser una reedición del original sólo se presentan las definiciones y aplicaciones que se han incluido en la obras ya que no hemos encontrado ninguna representación gráfica ni tabular.

3.3.4.1.- Descripciones.

A) Definiciones de máximos y mínimos.

Para establecer lo que se entiende por máximo y mínimo absoluto, primeramente Euler aporta su definición, en la que hemos de hacer notar en cuanto a la simbolización, que aunque se considera como representación de la función la letra y , y la de la variable independiente x , para representar el valor máximo y el mínimo se utiliza la igualdad $x=f$. Actualmente, nosotros utilizamos la letra f para designar la función, y no sólo un determinado valor que posee.

Quo autem natura maximorum ac minimorum clarius perspiciatur, ponamus y eiusmodi esse functionem ipsius x , quae maximum abtineat valore, si ponatur $x=f$, atque intelligitur, si x ponatur sivr amius sive minus quam f , tum valorem ipsius y inde oriundum minorem fore illo, quem induit, si ponatur $x=f$. Simili modi, si posito $x=f$ functio y minimum obtineat valorem necesse est, ut, sive x ponatur maius quam f sive minus, semper maior y ipsius valor resultet; haecque est definitio maximorum et minimorum absolutorum⁷⁷. (p. 447)

desearíamos, como otras obras son copiosamente pretratadas otras partes, y hasta tal punto que los primeros principios de calculo diferencial casi en Geometría son más pequeños que en otra ciencia, como es a las evolutas, con mucho cuidado aplicado.

⁷⁷ Cuando por su parte la naturaleza de los máximos y de los mínimos deseemos penetrar, sea y de esta manera función de x , que obtiene valores máximos si $x=f$, y por lo tanto, si x sea mayor o sea menor que f , los valores de y desde el originario son menores que él, que incluso, si ponemos $x=f$. Del mismo modo, si

La definición de estos puntos máximos y mínimos se da en relación con los valores que toma la función **(d)**, es decir, se está produciendo la aritmetización del Análisis, ya no se hace referencia a magnitudes geométricas como hemos visto en los dos libros anteriores.

b) Regla general para el cálculo de máximos y mínimos.

A partir de esta definición y del desarrollo en serie de potencias de una función para un valor a la izquierda de x , $(x-\alpha)$, y otro a la derecha de x , $(x+\alpha)$, para un valor de α suficientemente pequeño, llega a la conclusión de la regla **(d)** que establece las condiciones que debe cumplir una función para que tenga un máximo o un mínimo en términos de su primera diferencial:

Interim tamen ad casus, quibus valor ipsius y vel maximus vel minimus evadat, investigandos haec prima operatio instituenda es, ut differentiale functionis propositae

nihilum aequetur atque ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ omnes ipsius x valores elicantur....

Ostendemus enim fieri posse, ut neque maximum neque minimum locum habeat sit $\frac{dy}{dx}$ ⁷⁸

(p. 448)

y para distinguir si el valor obtenido es un máximo o un mínimo se especifica :

Si f valor seu unus ex valoribus x , quem obtinet ex aequatione

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

hicque valor substituatur in expressionibus $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. fiatque hac substitutione

$$\frac{ddy}{dx^2} = p, \frac{d^3y}{dx^3} = q, \frac{d^4y}{dx^4} = r \text{ etc}$$

Abeat autem functio ipsa y posito f loco x in F , atque si loco x ponatur $f+\alpha$, ista functio abibit in

$$F + \frac{1}{2}a^2p + \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r + \text{etc.}$$

sin autem loco x ponatur $f-\alpha$, prodibit

$$F + \frac{1}{2}a^2p - \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r - \text{etc.}$$

ponemos que en $x=f$ la función y obtiene un valor mínimo, entonces, tanto si ponemos x mayor que f como que si es menor, siempre resulta valor mayor de y ; esta es la definición de máximos y mínimos absolutos.

⁷⁸ A veces sin embargo en algunos casos, qué valor de y o es máximo o es mínimo, es investigado con una primera operación, de modo que con la ecuación de la función diferencial igualada a cero todos los valores de x se obtienen...Declaramos en efecto que es posible que ni un máximo ni un mínimo tengamos aunque sea

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

unde patet, si p fuerit quantitas affirmativa, utrumque valorem maiorem fore quam F , saltem si α quantitatem valde parvam denotet, ac propterea valorem F , quem functio y induit posito $x=f$, fore minimum. Sin autem p sit quantitas negativa, tum valor $x=f$ functioni y inducet valorem maximum⁷⁹ (p. 449).

La descripción anterior corresponde a la condición de la derivada segunda para identificar máximos y mínimos, utilizándose para ello, el desarrollo en serie de potencias de la función como lo hará posteriormente Lagrange. El uso de ese desarrollo sugiere la consideración de la función como aproximaciones sucesivas en torno al punto que se ha escogido para realizar este desarrollo. Dichas aproximaciones permiten precisar cada vez más el comportamiento de la función en el entorno de un punto, por medio de las sucesivas derivadas de la función. La utilización de la serie de potencias está también justificada porque así la expresión de la función, cualquiera que esta sea, viene dada por una suma de monomios de diferentes órdenes, es decir, por medio de una expresión analítica y el cálculo de las diferenciales resulta ser mucho más sencillo. De esta forma se empieza a perder el origen geométrico del Análisis, y esta disciplina se empieza a ocupar simplemente de fórmulas **(d)**. La condición expuesta anteriormente se completa mediante la consideración de los diferentes casos de nulidad de las derivadas de orden par, que se analizan por medio de pasos sucesivos como el siguiente:

Quodsi autem fuerit $p=0$, tum spectari debet valor ipsius q , qui si nos fuerit $=0$, valor

ipsius y neque maximus erit neque minimum ; nam posito $x=f+\alpha$ erit $F + \frac{1}{6}\alpha^3 q > F$ et

posito $x=f-\alpha$ erit $F - \frac{1}{6}\alpha^3 q < F$. Sin autem quoque fuerit $q=0$, ad quantitatem r erit

respiciendum ; quae si habuerit valorem affirmativum, valor functiones F , quem recipit posito $x=f$, erit minimum ; sin autem r habeat negativum, erit F maximum. At si quoque r evanescat, indicium ex sequentis litterae s valore erit petendum, quod simili erit illi, quod ex littera q formavimus. Scilicet si s non fuerit $=0$ functio F neque maximum erit neque minimum ; sin autem sit quoque $s=0$, tum sequens littera t , si habeat alore

⁷⁹ Si el valor f es uno de los valores de x que se obtienen con la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0$, este valor los sustituimos en

las expresiones $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ y hacemos las sustituciones $\frac{d^2y}{dx^2}=p$, $\frac{d^3y}{dx^3}=q$, $\frac{d^4y}{dx^4}=r$ etc. Si en la función y ponemos f en lugar de x en F , y en lugar de x ponemos $f+\alpha$ esta función es $F + \frac{1}{2}a^2p + \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r + \text{etc.}$ y si en lugar de x ponemos $f-\alpha$, tendremos $F + \frac{1}{2}a^2p - \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r - \text{etc.}$ en donde, si p fuera una cantidad positiva, otros valor mayores tendremos

de F , aunque α denote una cantidad bastante pequeña, y por esto los valores de F , como función e inducen que poniendo $x=f$, sea mínimo. Sin embargo si p es una cantidad negativa, el valor $x=f$ de la función e induce un valor máximo.

affirmativum, indicabit minimum ; sin autem habeat valorem negativum, indicabit maximum...⁸⁰ (p. 449)

C) Aplicación de la regla al cociente diferencial y a las operaciones algebraicas entre funciones.

Como es característico de los libros de Euler, se van considerando posteriormente todas las posibilidades según los diferentes resultados que se vayan obteniendo, en este caso, en relación con el cociente diferencial y con las operaciones algebraicas entre funciones (sumas, diferencias, productos y cocientes). Se enfatiza de esta forma la consideración de las fórmulas más que de las magnitudes geométricas.

- Según la cantidad de raíces que tenga el cociente diferencial:
 - Que el cociente diferencial tenga dos raíces iguales, con lo que se anularía la segunda derivada pero no la tercera y, por lo tanto, no se tendría ni máximo ni mínimo.
 - Que el cociente diferencial tenga tres raíces iguales, con lo que se anularían la segunda y la tercera derivada pero no la cuarta, así que si el valor que toma esta última derivada es positivo, se tendría un mínimo y si es negativo, se tendría un máximo.
 - Como conclusión se establece que si el número de raíces del cociente diferencial es par no se tiene ni un máximo ni un mínimo, pero si es impar, dependiendo de si el valor la primera diferencial no nula es positivo o negativo, se tendrá un mínimo o un máximo respectivamente.
- Según las operaciones algebraicas de funciones, si y tiene un máximo (mínimo) entonces:
 - ay^n con n impar y a positivo tendrá un máximo (mínimo).
 - $b-ay^n$ con n impar, a y b positivos tendrá un mínimo (máximo).

⁸⁰ Por lo cual cuando tengamos $p=0$, entonces debemos esperar el valor que tiene q, si no es cero, el valor de y no es ni máximo ni mínimo; pues poniendo $x=f+\alpha$ tendríamos $F + \frac{1}{6}\alpha^3 q > F$ y poniendo $x=f-\alpha$ tendríamos

$F - \frac{1}{6}\alpha^3 q < F$. Si por otro lado fuera $q=0$, habria que tomar en consideración la cantidad r; si tiene valor positivo, el valor de la función F, que recibe cuando $x=f$, sería mínimo; si r fuera un valor negativo, sería F máximo. Y si r se desvanece, el valor de la siguiente letra s tendríamos que dirigirnos, de forma similar a cómo la letra q formábamos. Por supuesto si s no fuera 0 la función f no tendría ni un máximo ni un mínimo; si fuera $s=0$, entonces la siguiente letra t, si tuviera valor positivo indicaba mínimo; si tuviera valor negativo, indicaba máximo...

- $\frac{a}{y^n} \pm b$ con n impar, a y b positivos tendrá un mínimo (máximo).
- En el caso anterior, si a es negativa tendrá un máximo (mínimo).
- En el caso en que n sea par, y sólo tome valores negativos y tenga un mínimo, y^n tendrá un máximo.
- Si y tiene un máximo (mínimo) positivo, y^n con n par tendría un máximo (mínimo).
- Si y tuviera un máximo negativo y n fuera par, y^n tendría un mínimo, y si tuviera un mínimo negativo, y^n tendría un máximo, y si las potencias pares fueran negativas (-2, -4, -6,...), ocurriría al contrario.
- Estas cuestiones no sólo se establecen cuando los exponentes son números enteros, sino cuando se tienen fracciones en las que el denominador es impar como en los casos: $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$, etc o si $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$, etc.
- En el caso en el que los denominadores son pares y si los valores de y son negativos, se tendrían valores imaginarios.
- En el caso en que los denominadores sean pares y el valor máximo (mínimo) de y fueran positivos, las potencias $y^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{3}{2}}, y^{\frac{1}{4}}$ tendrían un máximo (mínimo) y las potencias $y^{-\frac{1}{2}}, y^{-\frac{3}{2}}, y^{-\frac{1}{4}}$, etc tendrían un mínimo (máximo).

D) Aplicación de la regla al caso de los polinomios.

Además, distingue si la expresión algebraica de la función viene dada por un polinomio, o por un cociente entre polinomios y, en cada uno de estos casos, se van analizando pormenorizadamente las diferentes situaciones según las raíces que tengan esos polinomios. Así, por ejemplo, para una función que viene determinada por una suma de potencias de la forma:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{etc.} = y$$

tendrá una función derivada de la forma:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

de forma que calculadas las raíces de esa ecuación, si todas fuesen desiguales, los máximos y mínimos serían todos distintos. Si hubiera alguna raíz doble, no se tendría ni un máximo

ni un mínimo. En general, si el número de raíces iguales fuese par, no habría ni máximos ni mínimos y si fuese impar, se tendría o un máximo o un mínimo.

Asimismo, se consideran los casos en que las raíces de la primera derivada sean todas distintas, para lo cual también realiza un análisis detallado, de forma que si entre esas raíces se cumple que $\alpha < \beta < \gamma < \dots$, y si el valor de la función en $x = \alpha + \omega$ es mayor que para $x = \alpha$, entonces en este último punto la función y tiene un mínimo, por lo que luego la función irá creciendo, y para la siguiente raíz $x = \beta$ la función tendrá un máximo, con lo que luego irá decreciendo y tendrá un mínimo en la siguiente raíz $x = \gamma$, y así sucesivamente. Aplicado esto al caso del polinomio mencionado anteriormente, si dicho polinomio tiene grado par, la ecuación que resulta de igualar la primera derivada a cero, será de grado impar, y tendrá un número impar de raíces: una, tres, cinco,... Si sólo tiene una raíz impar, ha de ser un mínimo (el coeficiente de mayor grado del polinomio es 1), si tiene tres tendrá, un máximo entre dos mínimos, si tiene cinco dos máximos entre tres mínimos y así sucesivamente. En cambio, si el grado del polinomio es impar, el de la ecuación que resulta de igualar la primera derivada a cero será de grado par, luego tendrá cero, dos, cuatro,... raíces. En el primer caso, no se tiene ningún máximo ni mínimo, si tiene dos raíces la de menor abscisa será un máximo y la mayor, un mínimo, si tiene cuatro raíces la primera y la tercera serán mínimos y la segunda y la cuarta, máximos⁸¹. Es decir los máximos y mínimos aparecen de forma alternativa.

Perpetuo autem quotcunque radices fuerint reales, maxima et minima mutuo alternatim insequuntur⁸². (Euler, p. 457)

D) Aplicación de la regla a las funciones racionales.

Para las funciones que son racionales y que por lo tanto tienen la forma:

$$y = \frac{P}{Q}$$

siendo P y Q son funciones cualesquiera enteras de x, los valores de x que anulan a Q pero no a P, hacen que la función sea infinito (evadere infinitam) y como tal, encuentra un máximo⁸³. Para calcular el resto de los máximos y los mínimos, hay que calcular la primera diferencial, y al ser un cociente se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$$

con lo que se tiene que verificar que $QdP - PdQ = 0$. Las raíces de esa ecuación serán los posibles máximos o mínimos que tenga la función. Si tiene varias raíces, la derivada

⁸¹ Se supone que están ordenadas de mayor a menor

⁸² Siempre que se las raíces sean reales, los máximos y los mínimos se alternan sucesivamente.

⁸³ Euler considera que, cuando una función en un punto tiende a infinito, la función tiene un valor máximo en ese punto.

segunda nos dará información del tipo de valor encontrado, si dicha derivada es positiva se obtiene un mínimo, si es negativa se obtiene un máximo y si la derivada segunda es nula, hay que considerar los casos de posibles raíces múltiples como se ha realizado anteriormente, distinguiendo si su multiplicidad es de grado par o impar.

Para simplificar los cálculos relativos a la segunda derivada, cuando la función viene expresada en forma de fracción, Euler razona de forma que sólo deriva el numerador y establece que:

Sive postquam inventum fuerit $\frac{dy}{dx}$, cuius forma erit huiusmodi $\frac{R}{QQ}$, tantum quaeratur $\frac{dR}{dx}$, et quae radix huic expressioni valorem affirmativum inducit, ex ea proveniet minimum et contra maximum.⁸⁴ (Euler, p. 462)

De forma que para averiguar si una raíz corresponde a un máximo o un mínimo sólo hay que calcular el signo de la derivada del numerador de la primera derivada.

Dentro de las funciones racionales considera dos casos especiales:

- Las funciones del tipo $y = \frac{p}{Q^n}$.
- Las funciones del tipo $y = \frac{P^m}{Q^n}$

E) Aplicación de la regla a las funciones irracionales.

Finalmente, se tratan los casos de funciones irracionales y trascendentes, distinguiendo entre las primeras, los radicales impares que dan un solo valor, y los radicales pares, para los que se obtiene un valor positivo y otro negativo. Aplicado esto a las funciones de la forma la $y^{\frac{m}{n}}$, hay que considerar todas las posibilidades de combinaciones de m y n, según sean pares o impares.

En definitiva, el libro de Euler constituye un tratado en el que, a partir de la determinación de unas reglas, se van analizando pormenorizadamente y clasificando las funciones según su expresión simbólica, su fórmula **(d)**.

⁸⁴ Si después de encontrar $\frac{dy}{dx}$, cuya forma fuera $\frac{R}{QQ}$, la cantidad buscada $\frac{dR}{dx}$, en la que la raíz en esta expresión induce valores positivos, proviene de un mínimo y al contrario de un máximo.

F) Ejemplos de funciones polinómicas.

Las situaciones que plantea Euler en su libro son ejemplos en los que las funciones están definidas por su expresión algebraica **(d)**, es decir, no hay que hacer la traducción de un enunciado para obtener dicha expresión simbólica. Recogemos a continuación esos ejemplos que hemos clasificado según la utilización que Euler realiza de ellos, es decir, la razón por la cuál se incluyen en el texto. En general, están relacionados con el análisis que ha hecho de los diferentes tipos de funciones y que hemos comentado en el apartado anterior, de forma que para cada tipo de función se proponen varios ejemplos **(d)**. Los primeros, están relacionados con las funciones polinómicas para las cuales plantea situaciones en las que el exponente es genérico (n), como familias de funciones y funciones concretas. El primero de ellos está relacionado con los puntos múltiples para el que se realiza un estudio según que el exponente sea de grado par o impar.

EXEMPLUM 1

Invenire valores ipsius x, quibus haec functio $(x-a)^n$ fit maximum vel minimum.⁸⁵ (p. 452)

Esta función sólo tiene un mínimo cuando n es un número par, ya que en este caso la primera derivada que no se anula $\frac{d^n y}{dx^n}$ es de orden par y su valor n! es un número positivo. Dicho mínimo se alcanza cuando $x=a$ y su valor es $y=0$. En caso de que n sea impar, la función no tiene ni un máximo ni un mínimo y si el exponente es un número fraccionario, se tiene en $x=a$ un mínimo si el numerador es par y el denominador impar, y si son los dos impares, no se tiene ni máximo ni mínimo.

En el siguiente caso trata de una familia de funciones según varíen los parámetros a, b y c, de forma que para calcular los puntos extremos, hay que considerar diferentes casos, según los valores que tomen dichos parámetros.

EXEMPLUM 3

Invenire casus, quibus expressio haec $x^3-axx+bx-c$ maximum minimumve valorem accipit.⁸⁶ (Euler, p. 453)

Como la primera derivada se anula para $x = \frac{a \pm \sqrt{aa-3b}}{3}$, entonces si $aa < 3b$ no se tiene ni máximo ni mínimo, si $aa > 3b$ se obtendrán dos puntos extremos, uno será máximo y el otro mínimo, y si $aa = 3b$ se anulará también la segunda derivada y la función no tendrá ni máximo ni mínimo.

El resto de los ejemplos trata de funciones en las que no hay ningún parámetro. En todos los casos, las funciones están “preparadas” **(d)** para calcular fácilmente las raíces de

⁸⁵ Encontrar los valores de x, para los cuales la función $(x-a)^n$ tiene un máximo o un mínimo.

⁸⁶ Encontrar los casos para los que la expresión $x^3-axx+bx-c$ tome valores máximos o mínimos.

la derivada puesto que se obtienen valores enteros de una sola cifra, salvo en un caso que es racional, pero que se obtiene a partir de una ecuación de tipo lineal, con lo que los cálculos son muy sencillos. Podemos deducir por lo tanto que la primera derivada es fácilmente factorizable.

EXEMPLUM 2

Invenire casus, quibus valor huius formulae $xx+3x+2$ fit maximum vel minimum⁸⁷ (p. 452)

EXEMPLUM 4

Invenire casus, quibus aec functio ipsius x , $x^4-8x^3+22x^2-24x+12$ fit maximum vel minimum⁸⁸ (p. 454)

EXEMPLUM 5

Proposita sit haec funtio $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ quae quibus casibus fiat maximum minimumve, quaeritur.⁸⁹ (p. 454).

EXEMPLUM 6

Invenire casus, quibus haec formula $y=10x^6-12x^5+15x^4-20x^3+20$ fit maximum vel minimum⁹⁰. (p. 455)

Algunos de los casos anteriores se refieren a funciones cuya derivada tiene raíces dobles y por lo tanto no corresponderá a un máximo ni a un mínimo, en otro caso existe una raíz imaginaria, y en general, de unos a otros va aumentando el grado de la función considerada, para proponer el mayor número de casos posibles.

G) Ejemplos de funciones racionales.

En los ejemplos en los que se incluye una función racional, también procura Euler abarcar el mayor abanico posible de situaciones **(d)**, desde aquellas en las que el denominador tiene raíces reales y, por lo tanto, la función tiene una asíntota, hasta aquellas en las que existe un máximo cuya ordenada es menor que un mínimo. Lo que hace es que a partir de una misma expresión, “juega” con los signos para deducir las diferencias que marca ese cambio en el comportamiento de la función y en la posición de los puntos extremos **(d)**. Hay que hacer notar la simetría que poseen casi todas las funciones que se plantean y, como se ha mencionado anteriormente, la preparación que hace de las expresiones simbólicas para que los cálculos sean muy sencillos. En los siguientes ejemplos se pueden observar todas estas características:

⁸⁷ Encontrar los casos para los que la fórmula $xx+3x+2$ tenga un máximo o un mínimo.

⁸⁸ Encontrar los casos en los que la función de x , $x^4-8x^3+22x^2-24x+12$ tenga un máximo o un mínimo.

⁸⁹ Sea propuesta la función $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ en qué casos se obtiene un máximo o un mínimo.

⁹⁰ Encontrar los casos que hacen que la fórmula $y=10x^6-12x^5+15x^4-20x^3+20$ tenga un máximo o un mínimo.

EXEMPLUM 1

Invenire casus, quibus functio $\frac{x}{1+xx}$ fit maximum vel minimum⁹¹. (p. 457)

EXEMPLUM 2

Invenire casus, quibus formula $\frac{2-3x+xx}{2+3x+xx}$ fit maximum vel minimum⁹². (p. 458)

EXEMPLUM 3

Invenire casus, quibus formula $\frac{xx-x+1}{xx+x-1}$ fit maximum vel minimum⁹³ (p. 459)

EXEMPLUM 4

Quaerantur casus, quibus haec fractio $\frac{x^3+x}{x^4-xx+1}$ fiat maxima vel minima.⁹⁴ (p. 460).

EXEMPLUM 5

Invenire casus, quibus haec fractio $\frac{x^3-x}{x^4-xx+1}$ ⁹⁵(p. 461)

En algunos de los ejemplos anteriores se pueden comparar los polinomios correspondientes al numerador y al denominador, observándose la similitud que existe entre ellos salvo en relación con los signos. Al igual que los correspondientes al apartado anterior, también se va aumentando el grado de dichos polinomios, para poder obtener más raíces con lo que la variedad de posibilidades aumenta y en una misma función se pueden estudiar diferentes tipos de puntos críticos. En el caso de estas funciones racionales las raíces que se obtienen no son siempre números enteros, sino que también se obtienen

⁹¹ Encontrar los casos en los que la función $\frac{x}{1+xx}$ tiene un máximo o un mínimo.

⁹² Encontrar los casos en los que la fórmula $\frac{2-3x+xx}{2+3x+xx}$ tiene un máximo o un mínimo

⁹³ Encontrar los casos para los que la fórmula $\frac{xx-x+1}{xx+x-1}$ tiene un máximo o un mínimo.

⁹⁴ Buscar los casos para los que la fracción $\frac{x^3+x}{x^4-xx+1}$ tenga un máximo o un mínimo.

⁹⁵ Encontrar los casos para los que la fracción $\frac{x^3-x}{x^4-xx+1}$ tiene un máximo o un mínimo.

números racionales y reales, aunque, como ya se ha dicho, no existe ninguna dificultad en relación con los cálculos.

H) Ejemplos de funciones racionales en las que el numerador y el denominador son potencias de polinomios.

Estos ejemplos se exponen para poder aplicar los resultados teóricos que se han obtenido en relación con las funciones del tipo: $y = \frac{P^m}{Q^n}$, como es el caso del ejemplo siguiente:

EXEMPLUM 1

Proponatur fractio $\frac{(\alpha + \beta x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$; quae quo casu fiat maximum vel minimum, quaeritur
⁹⁶(p. 464)

Inicialmente Euler resuelve este caso general, considerando como parámetros las letras griegas α , β , γ , δ y después aplica esta situación a dos casos particulares asignando valores numéricos a dichos parámetros: $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$, $y = \frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}$, $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$. Asimismo, también propone el siguiente ejemplo, que se incluye ya que el denominador no se anula para valores reales, con lo que se puede aplicar directamente la regla que se ha establecido para este tipo de funciones.

EXEMPLUM 2

Proponatur formula $y = \frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2}$. (p. 465)

Igual que en los apartados anteriores, las funciones son simétricas y también lo son los puntos críticos que se obtienen.

I) Ejemplos de funciones irracionales.

También se incluyen los casos de funciones irracionales para radicales pares, no restringiéndose a las raíces cuadradas, sino incluyendo también raíces cuartas. Se trata de funciones que contienen parámetros, por lo que hay que hacer un estudio particular del signo del radicando según los diferentes valores que pueden tomar dichos parámetros. En algunas de ellas, se incluyen casos particulares para comprobar los resultados obtenidos.

⁹⁶ Proponemos la fracción $\frac{(\alpha + \beta x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$; en qué casos se tiene un máximo o un mínimo, se busca.

EXEMPLUM 1

Proposita sit formula $\sqrt{(aa + xx)} - x$; quae quibus casibus fiat maxima vel minima, quaeritur.⁹⁷ (p. 467)

EXEMPLUM 2

Quaerantur Casus, quibus haec forma $\sqrt{aa + 2bx + mxx} - nx$ fiat maximum vel minimum (p. 468).

EXEMPLUM 3

Quaerantur casus, quibus haec expressio $\sqrt[4]{(1 + mx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)}$ fiat maximum vel minimum. (p. 469).

En general, el razonamiento que se incluye para cada uno de los ejemplos anteriores, es bastante complicado y supone un conocimiento profundo y claro de la teoría expuesta con anterioridad. El hecho de trabajar a partir de familias de funciones supone que los resultados se pueden aplicar posteriormente a multitud de casos particulares, pero siempre se está desarrollando la exposición a partir de la expresión simbólica de la función, lo que marca un cambio bastante profundo respecto de los dos libros anteriores.

J) Ejemplos de funciones trascendentes.

Otra novedad respecto de los libros analizados con anterioridad, resulta la consideración de funciones trascendentes para las que utiliza resultados que ha establecido anteriormente en el texto en relación con el cálculo de la derivada de dichas funciones. Estos ejemplos son:

EXEMPLUM 1

Invenire numerum, qui ad suum logarithmum minimam teneat raionem.⁹⁸ (p. 470)

EXEMPLUM 2

Invenire numerum x, ut haec potestas $x^{1:x}$ fiat maximum⁹⁹ (p. 471)

EXEMPLUM 3

Invenire arcum x, ut sit eius sinus maximus vel minimum¹⁰⁰ (p. 471)

⁹⁷ Propuesta la fórmula $\sqrt{(aa + xx)} - x$, en que casos se tiene un máximo o un mínimo, calculamos

⁹⁸ Determinar el número, para el que la razón con su logaritmo sea mínima.

⁹⁹ Determinar el número x, que hace que la potencia $x^{1:x}$ sea un máximo.

¹⁰⁰ Determinar el arco x, para el que su seno sea máximo o mínimo.

EXEMPLUM 4

Invenire arcum x , ut rectangulum $x\sin x$ fiat maximum¹⁰¹. (p. 472)

En relación con la solución que ofrece Euler de los ejemplos anteriores hay que destacar que utiliza las expresiones de las funciones desde un punto de vista exclusivamente algebraico, intercambiando numeradores y denominadores o relacionando los máximos (mínimos) de una función con los mínimos (máximos) de su función inversa. La única función que mantiene una reminiscencia geométrica es la correspondiente al último ejemplo, en el que se propone el producto $x\sin x$, considerándolo como un rectángulo y haciendo referencia a que la variable x representa un cierto arco de circunferencia. De todas formas, es la única referencia geométrica que hemos encontrado en todo el texto.

En cuanto al segundo ejemplo, antes de resolverlo, Euler incluye una serie de igualdades con las que intenta mostrar que debe alcanzarse un máximo:

$$1^1:1=1,000000$$

$$2^1:2=1,414213$$

$$3^1:3=1,442250$$

$$4^1:4=1,414213$$

Se puede considerar una tabla de valores de la función para justificar el planteamiento de este ejemplo. Otra particularidad relacionada con los cálculos que se hacen para obtener la solución adecuada, es la utilización de la derivada logarítmica debido a la función que se está estudiando.

3.3.4.2.- Expresiones simbólicas.

Los símbolos utilizados por Euler para mencionar una función son indistintamente y o bien f , aunque esta última aparece generalmente para señalar que se está haciendo mención al valor que toma la función para un valor genérico o particular de x , y en este último caso también se utiliza la letra F . Dichas funciones se desarrollan en serie de potencias para comparar el valor de la función en un punto con el comportamiento de dicha función en un entorno de dicho punto **(e)**. Los tipos de funciones que aparecen en este libro van desde las polinómicas, pasando por las racionales, hasta las trigonométricas y logarítmicas, con lo que el abanico de funciones utilizadas resulta bastante amplio respecto de otros libros estudiados **(e)**. Generalmente, estas funciones más que una en concreto, representan toda una familia, ya que incorporan el uso de parámetros mediante las letras minúsculas del abecedario **(e)**. De todas formas, la única letra utilizada para representar la variable independiente, sea cual sea la función elegida, es la letra x , y muchas veces, la expresión sólo contiene dicha letra, junto con ciertos números y otras letras del abecedario,

¹⁰¹ Determinar los valores del arco x , para los que el rectángulo $x\sin x$ sea máximo.

pero no incluye ningún signo de igualdad que indique que se está tratando con una función, y no simplemente con un polinomio, por ejemplo. Son todas expresiones explícitas **(e)** que permiten el estudio del comportamiento de la función a través del estudio de los parámetros y los signos de cada uno de los monomios que forman parte de la expresión.

Ninguna de las funciones utilizadas viene descrita por un fenómeno que permita una traducción entre dos tipos de lenguajes, de tal forma que en todos los ejemplos, la expresión algebraica viene dada en el texto y, por lo tanto, es imposible la relación con elementos del lenguaje habitual. Aparecen de esta forma, las expresiones totalmente descontextualizadas **(d)**, no haciéndose ni siquiera mención de las curvas clásicas tan utilizadas en aquel momento. Se está construyendo la noción de función como objeto de estudio en sí mismo.

Respecto de los símbolos específicos del cálculo diferencial, no se incorpora todavía el símbolo de la derivada D o los apóstrofes correspondientes a los sucesivos órdenes de derivadas, sino que se mantiene el uso del diferencial de Leibniz, manejándolo como se ha dicho anteriormente, como si fuera un cociente algebraico **(e)**.

Al hacer Euler un estudio diferenciado según los diferentes tipos de funciones, esto va a repercutir en el tipo de expresiones simbólicas presentadas **(e)**, iniciándose dicho estudio con las más sencillas, es decir, con las polinómicas, algunas de las cuáles aparecen factorizadas para facilitar tanto el proceso de diferenciación como la resolución de la ecuación correspondiente, para calcular los máximos y los mínimos. Entre las funciones utilizadas, las hay más generales y más particulares, representando algunas de ellas a varias familias de funciones mediante la utilización de distintos parámetros, y haciendo el estudio en función de dichos parámetros. Algunas, en cambio, representan funciones muy concretas, y a pesar de que los grados de los polinomios a veces son bastante grandes, el cálculo de las raíces es muy sencillo, por lo que podemos considerarlas como funciones “preparadas” **(e)**. Entre ellas tenemos las siguientes:

$$(x-a)^n \text{ (p. 452); } xx+3x+2 \text{ (p. 452); } x^3-axx+bx-c \text{ (p. 453);}$$

$$x^4-8x^3+22x^2-24x+12 \text{ (p. 454); } y=10x^6-12x^5+15x^4-20x^3+20 \text{ (p.455)}$$

Otro grupo importante de funciones está representado por las funciones racionales, algunas de las cuales poseen ceros en el denominador y otras no, pero todas ellas tienen alguna raíz real en el numerador. La mayoría de estas funciones representan a una en concreto, pero también, como en el grupo anterior, hay algunas en las que se analizan las diferentes posibilidades en relación con los distintos parámetros y su colocación dentro de la función. Incluso en algunos casos la función posee un exponente genérico m .

$$\frac{x}{1+xx} \text{ (p. 457); } \frac{2-3x+xx}{2+3x+xx} \text{ (p. 458); } \frac{xx-x+1}{xx+x-1} \text{ (p. 459); } \frac{x^3+x}{x^4-xx+1} \text{ (p. 460)}$$

$$\frac{x^2-1}{x^4-xx+1} \text{ (p. 461); } \frac{(\alpha+\beta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n} \text{ (p.464); } y=\frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2} \text{ (p. 465)}$$

Se incluyen también funciones irracionales con lo que se utiliza el signo radical, pero no sólo en referencia a la raíz cuadrada sino que, como vemos a continuación, también se incluyen raíces cuartas. Dichas raíces, a su vez, intervienen participando en otras operaciones como adiciones y sustracciones.

$$\sqrt{(aa + xx)} - x \text{ (p. 467); } \sqrt{(aa + 2bx + mxx)} - nx \text{ (p. 468); } \sqrt[4]{(1 + mx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)} \text{ (p. 469)}$$

El último bloque, lo constituyen las funciones llamadas trascendentes, es decir, aquellas en las que intervienen logaritmos, funciones circulares, exponenciales; además de las cuatro operaciones básicas.

$$y = \frac{x}{lx} \text{ (p. 470); } x^{1:ix} \text{ (p. 471); } y = \sin x \text{ (p. 471); } x \sin x \text{ (p. 472)}$$

El abanico de funciones que se ha considerado es, como hemos visto, bastante amplio y se está empezando a dar mayor importancia a la expresión simbólica de la función frente a cualquier otra.

3.3.5.- Conclusiones.

3.3.5.1.- *Análisis socio-cultural.*

- CIA1: Este libro fue escrito junto con otros dos dedicados al Cálculo Infinitesimal entre los años 1745 y 1763, cuando Euler estaba en Berlín. Son libros de texto escritos en latín, a pesar de ser el alemán su lengua materna, y entre los tres abarca todo el Análisis que se conocía en la época, incluyendo el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, con lo que se ofrece una visión bastante global de la forma de enseñar esta materia en la época.
- CIA2: Euler recibe su formación de Jean Bernoulli después de que lo hiciera el marqués de l'Hôpital junto a los hijos de su maestro, pero aunque el marqués en su libro expuso la teoría tal como la había recibido de su maestro, los libros de Euler suponen un cambio profundo en cuanto a la concepción del Análisis Matemático.
- CIA5: La obra de Euler fue muy amplia conociéndose más de 860 obras originales en las que toca diversos aspectos tanto de las matemáticas como de sus aplicaciones, es decir, poseía un conocimiento muy amplio y profundo de las matemáticas y consiguió que éstas dieran un gran paso adelante en su evolución a lo largo de la historia.
- CEM1: No sólo con este libro, sino con el resto de los libros de texto que escribió Euler, se configura una moderna concepción del libro de texto de matemáticas, que comienza con los fundamentos de la materia y culmina, tras una exposición sistemática, con las líneas más recientes de investigación.

- d: Las aplicaciones que se consideran a lo largo del libro son exclusivamente algebraicas, haciéndose más énfasis en la expresión simbólica de la función que se está estudiando, que en cualquier otro tipo de representación. Esto es un indicador de un fuerte cambio que se está empezando a gestar, es decir, se pasa de la consideración y estudio de objetos geométricos a la consideración y estudio de objetos algebraicos que van teniendo entidad en sí mismos, y que se van constituyendo en verdaderos objetos matemáticos. Esto supone una descontextualización de las funciones, ya que no se hace referencia ni a situaciones o formas de conocimiento que dan lugar a ellas, ni siquiera a una descripción geométrica que permita su visualización.

3.3.5.2.- *Análisis epistemológico.*

- CIA2: La formación que tuvo Euler, fue muy amplia, conociendo directamente de Bernoulli los fundamentos del Análisis Matemático.
- CIA4: Uno de los cambios más importantes que se introdujeron en el Análisis Matemático es relativo a la noción de función. Hasta entonces había sido concebida como una relación entre dos variables, mientras que a partir de Euler empieza a pensarse como una asociación que a un número x le asocia otro $f(x)$. Este cambio va a afectar al concepto de diferencial utilizado hasta entonces, ya que pasó de ser considerado como la variación de una variable a la razón de cambio de la función en relación con el incremento de la variable.
- CEM3: Se realiza una revisión de la noción de diferencias finitas y la aplicación a las series para pasar a las diferencias infinitas, y las de cualquier orden. Se diferencia todo tipo de funciones desde las algebraicas a las trascendentes y las que tienen varias variables, estableciéndose las reglas y fórmulas para calcularlas. Es decir, se trata de establecer una teoría de tipo general deduciendo las fórmulas necesarias para poder diferenciar cualquier tipo de función según la expresión simbólica que tenga. En este sentido, las fórmulas pueden sustituir al concepto de diferencial en el sentido de que, independientemente de que se comprenda o se adquiera este concepto, la simple aplicación de una fórmula nos permite resolver los problemas que se nos planteen, con lo que el Análisis Matemático se irá convirtiendo en algo puramente mecánico más que conceptual.
- d: Hay que destacar la utilización del cociente diferencial frente al diferencial que se había utilizado en el libro de l'Hôpital o las fluxiones en el de MacLaurin, así como el desarrollo en serie de potencias de las funciones que sugiere una dependencia de las expresiones analíticas y su estudio, con lo que se pierde el origen geométrico del Análisis, pasándose a ocupar más del estudio de las fórmulas.

Destaca el análisis detallado que hace Euler de las operaciones algebraicas de funciones y de su derivación, clasificando dichas funciones según su expresión simbólica y estudiando la diferenciación de cada uno de estos tipos de forma

pormenorizada e independiente, estableciendo todas las posibilidades en relación con los parámetros que posean dichas expresiones simbólicas.

- e: Las expresiones simbólicas vienen dadas todas en forma explícita considerándose únicamente como variable independiente la x , con lo que se pierde la flexibilidad que había logrado MacLaurin en relación con el intercambio del papel de las dos variables que intervienen en una función. También hay que destacar el uso del desarrollo en serie de potencias de las funciones para comparar el valor de la función en un punto con el comportamiento de dicha función en puntos muy cercanos, aunque también se ha perdido el dinamismo presente en los dos libros anteriores al estudiar las expresiones simbólicas de las funciones en sí mismas. Se ofrece un amplio abanico de tipos de funciones incluyendo no sólo las algebraicas sino también racionales, irracionales y trascendentes.

Las expresiones simbólicas suelen incluir parámetros para poder representar toda una familia de funciones y de forma que, estudiando los diferentes casos asociados con los parámetros, se puedan establecer los tipos de puntos críticos que posean las funciones y de esta forma poder clasificarlas. Es de destacar la sistematización realizada por Euler en relación con estas clasificaciones, que parece ser uno de los objetivos que se propuso Euler a la hora de escribir este libro de texto y que hace que las funciones empiecen a considerarse en sí mismas como objetos matemáticos, para los que se requiere un estudio detallado en relación a su expresión simbólica.

3.3.5.3.- *Análisis didáctico.*

- CIA3: Se considera el Cálculo Diferencial como el método para determinar el cociente diferencial cuando los incrementos se desvanecen.
- CEM2: El libro se divide en dos partes: en la primera se definen los conceptos y se establecen sus propiedades, y en la segunda se estudian las aplicaciones, como la resolución de ecuaciones diferenciales, la determinación de máximos y mínimos, la investigación de raíces reales e imaginarias de las series, la interpolación de series o el uso del Cálculo Diferencial a la resolución de fracciones.
- CEM4: Al ser una reedición relativamente actual del libro original de Euler no podemos tener en cuenta las características de la impresión, aunque se ha respectado el idioma en el que fue escrito, el latín, así como la forma de las expresiones simbólicas utilizadas. Pero no se incluyen las representaciones gráficas que posiblemente si incluyó Euler.
- d: La definición que da Euler de puntos críticos es algebraica en el sentido de que indica que esos puntos son aquellos para los que se anula la primera derivada de la función y, por lo tanto, se asocian a la resolución de una ecuación. Además los

ejemplos que utiliza Euler vienen determinados y agrupados por su expresión simbólica, con lo que se provoca la aplicación de las fórmulas específicas para cada uno de los grupos considerados. Es decir, la enseñanza se ha enfocado hacia el conocimiento y aplicación de ciertas fórmulas de tipo algebraico. Se ha pasado de un Análisis de tipo geométrico a uno de tipo algebraico.

Los ejemplos que aparecen en el texto están “preparados”, en el sentido de que en cada sección se incluyen los que son similares y además se ha procurado, tanto que los cálculos sean sencillos, como que se ofrezcan el mayor número de posibilidades, revisando todos los casos, así como que se relacionen las variaciones en las expresiones simbólicas de las funciones, con los tipos y posiciones de los puntos críticos.

3.4.- *Cours de Mathématique* de Etienne Bézout (1764).

3.4.1.- Ficha de referencia de la obra.

Autor: Etienne Bézout

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: 1730-1783.

Título: Cours de mathématique

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1764, Imp. H. Offray: Avignon.

Año, editorial y lugar de la edición consultada:

Localización del manual utilizado: Biblioteca General de la Universidad de Salamanca. 36823

3.4.2.-Contextualización e intencionalidad del autor.

A lo largo del siglo XVIII se publicaron muchos libros de texto que alcanzaron un enorme éxito; además durante la segunda mitad de este siglo produjo un género (**CEM1**) que más tarde se conoció como el del *Cours de mathématiques*, es decir, el de las obras de varios volúmenes (a menudo tres) que cubrían la matemática o una de sus ramas desde el nivel más elemental al más avanzado. Una de las obras de este tipo que alcanzó más éxito fue el *Cours de mathématique* de Bézout, un tratado en seis volúmenes que apareció por primera vez en 1764-1769, del que se publicó inmediatamente una segunda edición en 1770-1772, y que pudo vanagloriarse de la gran cantidad de versiones conseguidas, tanto en francés como traducidas a otras lenguas. Fue a través de tales recopilaciones, más que en las obras originales de los autores mismos, como se divulgaron los descubrimientos matemáticos de Euler y de D'Alembert, entre otros grandes matemáticos. Durante el siglo XVIII las universidades francesas no destacaron en el cultivo de las matemáticas, siendo las academias y escuelas militares las que produjeron un importante número de matemáticos, y un *Cours de mathématiques* como el de Bézout resultaba muy adecuado para ser utilizado en instituciones de este tipo (**CIA1**). Bézout mismo enseñó en una escuela militar y fue examinador de la marina, por lo tanto estuvo en estrecho contacto con los programas que se

enseñaban en su época. Sin embargo, en el plazo de unos pocos años, a partir de la muerte de los principales matemáticos, el sistema de enseñanza superior en Francia iba a experimentar una revisión y una drástica reforma, como resultado de los cambios producidos por la Revolución Francesa. Durante este breve pero importante periodo Francia volvió a ser, una vez más, el centro matemático del mundo, tal como lo había sido ya durante mediados del siglo XVII.

De entre las enciclopedias matemáticas de finales del siglo XVIII, la que alcanzó mayor éxito a juzgar por sus repetidas ediciones, fue la de Bézout, que era instructor en la escuela de Mézières a la que asistieron otros matemáticos como Monge o Carnot. El *Cours de mathématique* de Bézout continuó siendo una obra muy prestigiosa aún durante el primer tercio del siglo XIX, especialmente en Norteamérica, donde partes de ella se utilizaron traducidas al inglés en West Point y en otras academias. La cuarta parte del *Cours* de Bézout, que trata de los principios de la mecánica, es la verdadera razón de ser del programa, de forma que su cálculo “was more an appendix to prepare his course in mechanics, and this is very indicative of the place of higher mathematics before 1795” (Dhombres, 1985), aunque se necesiten esos principios generales para abordar las cuestiones de tipo más práctico.

Nous nous y sommes déterminés d’autant plus volontiers qu’indépendamment de ce que ces principes deviennent souvent d’un usage indispensable, même dans des questions qui auroient paru fort simples, ils sont d’ailleurs (si l’on en excepte ce qu’on trouvera en petit caractere, & dont l’usage est moins fréquent) une suite si naturelle des connoissances exposées dans la troisieme Partie, qu’ils ne peuvent qu’être entendus avec faicilité, des qu’on possédera celles-ci¹⁰² (p. iv).

El énfasis puesto en la mecánica, y en la última sección sobre navegación concuerda perfectamente con el uso del *Cours de mathématiques* como libro de texto para una academia militar (CIA3):

Ces principes généraux, dont nous donnons d’ailleurs, par anticipation, diverses applications, particulièrement au navire, sont suivis des loix de l’équilibre del fluides, & des corps qui y sont plongés ; cette partie a un rapport trop direct au navire, pour ne pas trouver place dans cet Ouvrage¹⁰³. (p. iv)

La superioridad matemática de Francia (y, en realidad de la Europa continental como un todo) durante el siglo XVIII estaba basada en gran parte en la aplicación del análisis a la mecánica, tal como se enseñaba en las escuelas técnicas:

¹⁰² Hemos determinado tanto más que con mucho gusto, que independientemente de que estos principios se vuelvan a menudo de un uso indispensable, incluso en relación con las cuestiones que se hacen aparentemente más simples, son por otra parte (si exceptuamos los que encontraremos en carácter pequeño y que su uso es menos frecuente) una sucesión natural de conocimientos expuestos en la tercera parte, que no pueden ser entendidos con facilidad si no los poseyéramos.

¹⁰³ Estos principios generales, de los que damos por otra parte, por anticipación, diversas aplicaciones, en particular en la navegación, están seguidos de las leyes del equilibrio en fluidos, y de los cuerpos que son sumergidos; esta parte tiene una relación muy directa con la navegación, para no encontrar lugar en esta obra.

Des qu'on voudra rendre la mécanique utile, il faut sortir des suppositions par lesquelles on est obligé de commencer dans l'étude des principes généraux ; il faut cesser de faire abstraction de la masse des machines, de leur pesanteur, du frottement, &c. cesser de considérer l'action des corps comme toujours réunies à leur centre de gravité, &c. cesser de regarder les machines comme ne partageant point l'action de la force motrice, &c. cesser de regarder les machines comme ne partageant point l'action de la force motrice, &c. en un mot, avoir égard à l'état réel & physique où sont les choses dans la nature. Des-lors le nombre des éléments qui entrent dans chaque question, étant augmenté, il devient nécessaire d'employer pour la résolution de ces questions, des méthodes plus efficaces ; c'est dans cette vue que nous avons fait précéder la mécanique, d'une courte exposition des principes des Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-mathématiques¹⁰⁴. (Bézout, pp. iii-iv)

Los matemáticos de la Revolución Francesa se formaron bajo esta influencia, en marcado contraste con la situación en Inglaterra. Y, como cabía esperar, este contraste en el espíritu de la matemática se hizo más agudo durante la Revolución, puesto que Francia tenía mas necesidad de una enseñanza técnica, y como resultado Inglaterra fue quedando cada vez más aislada de la Europa continental.

Sus investigaciones se centraron en la resolución de ecuaciones algebraicas, el estudio de los polinomios y la divisibilidad, las curvas planas y sus intersecciones, siendo su principal obra: *Théorie générale des équations algébriques* (1779) (CIA5).

3.4.3- Caracterización y estructura de la obra.

El libro al que dedicamos nuestra atención, constituye el cuarto volumen de la obra de Bézout conocida bajo el epígrafe de *Cours de mathématiques*. Este libro tiene 365 páginas y está dividido en dos partes, en la primera incluye los principios del Cálculo, y la segunda está exclusivamente dedicada a la Mecánica (CEM1, CEM2). Al inicio del texto expone Bézout la razón por la cual considera importante el Análisis Matemático: para poder calcular las variaciones de las magnitudes y por sus aplicaciones principalmente a la Mecánica:

Nous avons donné dans la troisieme Partie, les regles nécessaires pour calculer les quantités, dans tel état de grandeur qu'on puisse les supposer. Mais nous n'avons point considéré les variations par lesquelles ces quantités arrivent à tel ou tel état de grandeur. Ce nouvel objet à considérer dans les quantités, donne lieu à une autre branche del Analyse, qui est de la plus grande utilité dans les Sciences Physico-mathématiques & principalement dans la Méchanique, où l'on ne parvient souvent à déterminer les rapports des quantités qui entrent dans les questions relatives à cette science, qu'après

¹⁰⁴ Como deseamos reflejar la mecánica útil, debemos seleccionar las suposiciones por las cuáles estamos obligados a comenzar en el estudio de los principios generales; vamos a dejar de hacer abstracción de la masa de las máquinas, de su peso, de su rozamiento, &c. dejamos de considerar la acción de los cuerpos como unidos en su centro de gravedad, &c dejamos de considerar las máquinas no como el punto de partida de la acción de la fuerza motriz, &c, en una palabra teniendo en cuenta que el estado real y la física son las cosas de la naturaleza. Desde entonces el número de elementos que entran en cada cuestión han aumentado, se hace necesario el empleo para la resolución de estas cuestiones, de los métodos más eficaces; es desde este punto de vista que nosotros vamos a hacer preceder a la mecánica de una corta exposición de los principios del Cálculo que sirven de introducción a las ciencias Físico-matemáticas.

avoir considéré les rapports de leurs variations, c'est-à-dire, des accroissements ou des diminutions qu'elles reçoivent à chaque instant¹⁰⁵. (pp. 1-2)

En la parte en que desarrolla los principios del Cálculo se incluyen las nociones relativas al Cálculo Diferencial e Integral que los define considerando uno el inverso del otro:

Nous nous proposons deux objets: le premier d'enseigner à descendre des quantités à leurs éléments : & la méthode pour y parvenir s'appelle calcul *différentiel*. Le second nous montrera la route pour revenir des éléments des quantités, aux quantités mêmes ; & nous appellerons cette méthode , calcul *integral*¹⁰⁶. (p. 2)

Se inicia aportando una definición de cantidad infinita o infinitamente pequeña de una forma relativa en el sentido de que su infinitud depende de la cantidad con la que se está comparando **(d)**:

Nous disons qu'une quantité est infinie ou infiniment petite à l'égard d'une autre, lorsqu'il n'est pas possible d'assigner aucune quantité assez grande ou assez petite pour exprimer le rapport de ces deux-là, c'est-à-dire, le nombre de fois que l'une contient l'autre¹⁰⁷ (p. 3)

A partir de la noción de diferencia, se establecen las reglas del cálculo de la diferencial de algunas de las funciones elementales (trigonométricas, logarítmicas, exponenciales,...), se aplican al cálculo de máximos y mínimos, puntos de inflexión y de retroceso, se dan algunas reglas para la determinación de integrales, y se aplica a la rectificación de líneas curvas, a las superficies curvas y a la medida de volúmenes, finalizando con la resolución de algunas ecuaciones diferenciales **(CEM3)**. La noción que se maneja de diferencia es la siguiente **(d)**:

Lorsque l'on considere une quantité variable croissant par degrés infiniment petits, si l'on veut connoître la valeur de ces accroissement, ce qui se présente de plus naturel, est de déterminer la valeur de cette quantité pour un instant quelconque, & la valeur de cette même quantité pour l'instant immédiatement suivant : alors la différence de ces

¹⁰⁵ Nosotros hemos dado en la tercera parte, las reglas necesarias para calcular las cantidades en tal estado de magnitud que podamos suponer. Pero no hemos considerado las variaciones por las cuales estas cantidades llegan a tal o tal estado de magnitud. Este nuevo objeto a considerar de las magnitudes, da lugar a otra rama del Análisis, que es de la más gran utilidad en las Ciencias Físico-matemáticas y principalmente en la Mecánica, donde no conseguimos a menudo determinar las razones de las cantidades que entran entre las cuestiones relativas a esta ciencia, sino después de haber considerado las razones entre sus variaciones, es decir, los crecimientos o las disminuciones que reciben en cada instante.

¹⁰⁶ Hemos propuesto dos objetos: el primero, enseñar a descender de las cantidades a sus elementos; y el método para conseguirlo se llama cálculo *diferencial*. El segundo nos mostrará la ruta para volver los elementos de las cantidades en las cantidades mismas; & llamamos a este método cálculo *integral*.

¹⁰⁷ Decimos que una cantidad es infinita o infinitamente pequeña en relación con otra, siempre que es posible asignar alguna cantidad bastante grande o bastante pequeña para expresar la razón entre las dos, es decir, el número de veces que una contiene a la otra.

deux valeurs est l'accroissement ou la diminution que cette quantité reçoit : c'est aussi ce qu'on appelle la *différence* ou la *différentielle* de cette quantité¹⁰⁸. (p. 12)

Pero no se incluye la definición de cociente diferencial y cuando se maneja a lo largo del texto dicho cociente, se hace como si de una fracción se tratara.

En la segunda parte (**CEM3**), en la que se exponen los principios generales de la Mecánica, se incluyen primeramente una nociones preliminares relativas al movimiento, tanto el uniforme como el uniformemente acelerado y el libre, cuestiones relativas al equilibrio, la composición y descomposición de fuerzas, los momentos, los centros de gravedad y el equilibrio de los cuerpos:

Nous avons renfermé dans ce premier volume, tout ce que nous avons compris sous le nom de Principes généraux de la Mécanique. C'est-à-dire, les lois du mouvement simple uniforme ou varié, les lois du mouvement composé, la composition & décomposition des forces ; l'usage des moments pour cette composition, l'application de cette théorie, à la recherche des centres de gravité, & des propriétés de ces centres¹⁰⁹. (p. iv)

Y, finalmente, dedica toda una parte al estudio del equilibrio de los cuerpos, a los fluidos y a los cuerpos que están sumergidos:

Le second volume renferme l'application de ces principes généraux, à différents cas de mouvement & d'équilibre. Nous y avons examiné un très-grand nombre d'objets ; & si les bornes qu'il faut enfin se prescrire, ne nous ont pas permis d'y en comprendre un plus grand nombre, nous espérons que ce que nous y avons dit, ne remplira pas moins les vues que nous nous sommes proposées, de mettre les Lecteurs en état d'entendre & d'appliquer la mécanique¹¹⁰. (pp. iv-v).

Como vemos, el libro está escrito en francés, estando cada una de las dos partes encabezada por una ilustración en la que se incluyen cenefas decorativas con elementos florales. Cada parte está titulada en cursiva, la primera letra del desarrollo es de mayor tamaño que el resto y los diferentes artículos aparecen numerados de la misma forma que en el libro de MacLaurin.. Los conceptos cuando se definen están escritos en letra cursiva y

¹⁰⁸ Siempre que consideramos una cantidad variable creciente por grados infinitamente pequeños, si deseamos conocer el valor de este crecimiento, lo que se presenta como más natural, es determinar el valor de esta cantidad para un instante cualquiera, & el valor de esta misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente: la diferencia de estos dos valores es el crecimiento o la disminución que esta cantidad recibe: esto es lo que llamamos diferencia o la diferencial de esta cantidad.

¹⁰⁹ Hemos incluido en este primer volumen, todo lo que está comprendido bajo el nombre de los Principios generales de la Mecánica. Es decir, las leyes del movimiento simple uniforme o variado, las leyes del movimiento compuesto, la composición y la descomposición de las fuerzas, el uso de los momentos para esta composición, la aplicación de esta teoría a la investigación de los centros de gravedad, & las propiedades de estos centros.

¹¹⁰ El segundo volumen encierra la aplicación de estos principios generales, a diferentes casos del movimiento y del equilibrio. Nosotros hemos examinado una gran cantidad de objetos; & si los límites que tenemos prescritos, no nos han permitido incluir un mayor número, esperamos que aquellos que hemos dicho, no llenarán al menos los vistos que nos hemos propuesto, para colocar al Lector en esto de entender & de aplicar la mecánica.

se incluyen láminas desplegadas con gráficas relacionadas con los conceptos y situaciones presentados a lo largo del texto **(CEM4)**.

3.4.4.- Representaciones.

Los sistemas simbólicos de representación usados en relación con los puntos críticos son: descripciones verbales, representaciones gráficas y expresiones simbólicas.

3.4.4.1.- Descripciones.

La estructura del libro en relación con las definiciones y reglas para el cálculo de los puntos críticos, es similar a la utilizada por l'Hôpital, dando primeramente las definiciones, y estableciendo después las reglas prácticas para dicho cálculo. Bézout proporciona inicialmente la definición y la regla para los puntos críticos y luego las aplica al caso de puntos máximos, mínimos y de inflexión.

A) Definición de punto crítico.

Para caracterizar los puntos críticos, se propone una definición en la que se distinguen dos posibilidades, según cuál sea la diferencial que se anula. Al igual que MacLaurin intercambia de forma flexible los papeles que cumplen las dos variables que definen la función:

Donc, pour savoir en quel endroit la tangente d'une courbe devient parallele aux ordonnées, il faut chercher en quel endroit la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devien zéro, ou ce qui revient au même, en quel endroit dx devient zéro, & pour savoir en quel endroit la tangente de la courbe est parallele aux abscisses il faut chercher en quel endroit $\frac{dy}{dx}$ devient zéro, ou ce qui revient au même, en quel endroit dy es zéro. Car il est évident que dans le premier cas, l'angle de la courbe, avec les ordonnées est nul ; & dans le second cas, l'angle de la courbe, avec les abscisses est nul¹¹¹. (p. 56)

Se considera entonces que un punto es crítico tanto si tiene tangente horizontal y, por lo tanto, paralela al eje de abscisas, como si la tangente es vertical y, por lo tanto, paralela al eje de ordenadas.

¹¹¹ Luego para saber en qué lugar la tangente de una curva se hace paralela a las ordenadas, hay que buscar en qué lugar el valor de $\frac{dx}{dy}$ se hace cero, o lo que es lo mismo, en qué lugar dx se hace cero, & para saber en qué

lugar la tangente de la curva es paralela a las abscisas, hay que buscar en qué lugar $\frac{dy}{dx}$ se hacen cero, o lo que es lo mismo, en qué lugar dy es cero. Como es evidente en el primer caso, el ángulo de la curva, con las ordenadas, es nulo; & en el segundo caso, el ángulo de la curva, con las abscisas, es nulo.

B) Regla para el cálculo de puntos críticos.

A partir de esta definición se establece la regla para calcular los puntos críticos de una forma eminentemente algebraica **(d)**, es decir, como resolución de una ecuación, que es la siguiente:

Il fuit évidemmmment de là, que si l'on veut savoir si une courbe dont on a l'équation, a, dans quelque endroit, sa tangente parallele aux ordonnées ou abscisse, il faut différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, si l'on égale le numérateur

de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, à zéro, on aura une équation qui, conjointement avec l'équation qui,

conjointement avec l'équation même de la courbe, donnera la valeur de x & celle de y qui déterminent en quel endroit la tangente est parallele aux ordonnées ; en sore que si cela arrive en plusieurs endroits, on aura plusieurs valeurs pour x & plusieurs valeurs pour y¹¹². (Bézout, p. 57).

C) Aplicación al caso del cálculo de puntos máximos y mínimos.

Se indica en qué consiste el método de máximos y mínimos considerándolo como una de las aplicaciones más importantes del Análisis. En este caso se establece una diferencia respecto de los dos primeros libros analizados en cuanto que éstos consideraban las magnitudes como entidades geométricas, mientras que Bézout las considera como cantidades aritméticas **(d)** entre las que se puede establecer una relación de orden, y decir cuándo una es mayor que otra.

C'es à cela que se réduit la méthode qu'on appelle de *maximis & minimis*, qui est une des plus utiles de l'analyse, & qui a pour objet de faire trouver, entre plusieurs quantités qui croissent ou décroissent suivant une même loi, qu'elle est la plus grande ou la plus petite, ou en général celle qui a certaines propriétés dans le plus haut degré à l'égard de toutes ses semblables¹¹³. (p. 62)

Esta misma característica se puede observar cuando se establece el método para averiguar si el punto que se ha obtenido es un máximo o un mínimo, en el que se utiliza

¹¹² Es evidente que si queremos saber si una curva de la que tenemos la ecuación, a, en qué lugar su tangente es paralela a las ordenadas o las abscisas, debemos diferenciar esta ecuación y calcular el valor de $\frac{dx}{dy}$, si

igualamos el numerador de $\frac{dx}{dy}$ a cero, tendremos una ecuación que, conjuntamente con la ecuación misma

de la curva, dará los valores de x y de y que determinan en qué lugar la tangente es paralela a las ordenadas; de forma que si se llega a varios lugares, tendremos varios valores de x y varios valores de y.

¹¹³ Esto es a lo que se reduce el método que llamamos de máximos y mínimos, que es uno de los más útiles del Análisis, & que tiene por objeto encontrar, entre varias cantidades que crecen o decrecen siguiendo la misma ley, cual es la más grande o la más pequeña, o en general cuál tiene ciertas propiedades de más grado de entre las semejante.

como medio la comparación del valor de x con valores cercanos a él, de forma que se enfatiza el carácter aritmético de las magnitudes.

Ainsi, pour distinguer si une quantité est un *maximum*, ou un *minimum*, ou l'un & l'autre, il faut, en supposant que a marque la valeur de x , qui convient au *maximum* ou *minimum*, substituer dans la quantité proposée au lieu de x , successivement $a+q$, a , & $a-q$. Si les deux resultats extrêmes sont réels & plus petits que celui du milieu, la quantité est un *maximum*, si au contraire, les deux résultats extrêmes sont plus grands que celui du milieu, la quantité est un *minimum* : enfin, si des deux résultats extrêmes l'un est imaginaire & l'autre réel, la quantité est tout à la fois un *maximum* & un *minimum*.¹¹⁴ (p. 65)

Como la regla que se ha obtenido para el cálculo de puntos críticos es de tipo algebraico ya que se trata de resolver una ecuación, tiene gran importancia la expresión algebraica de la función que hay que diferenciar y, por ello, se dan algunas reglas para que el cálculo de dichos puntos sea más sencillo:

Lorsque l'expression d'une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, renferme quelque multiplicateur ou quelque diviseur constant, on peut supprimer ce multiplicateur ou ce diviseur, avant que de différencier¹¹⁵ (p. 67)

D) Aplicación a los puntos de inflexión.

En cambio en cuanto a los puntos de inflexión, la definición que se da hace referencia a la representación gráfica de la curva (**d**), asociándolos al cambio de convexidad de dicha curva:

Il arrive quelquefois qu'une même branche de courbe après avoir tourné sa concavité vers un certain point, tourne ensuite sa convexité vers ce même point, en continuant néanmoins sa marche. Telle est la courbe que l'on voit représentée (fig. 22). Le point O où ce changement arrive, s'appelle point d'*inflection*¹¹⁶. (p. 86)

El método para el cálculo de los puntos de inflexión es, como en el caso de los máximos y mínimos, de tipo algebraico (**d**) y ligado a la resolución de una ecuación:

¹¹⁴ Para distinguir si una cantidad es un máximo o un mínimo o lo uno y lo otro, suponiendo que a marca el valor de x que corresponde al máximo o al mínimo, sustituir en la cantidad propuesta en lugar de x , sucesivamente $a+q$, a & $a-q$. Si los dos resultados extremos son reales y más pequeño al del medio, la cantidad es un máximo, si por el contrario, los dos resultados extremos son más grandes que el del medio, la cantidad es un mínimo: en fin, si los dos resultados extremos son uno imaginario y el otro real, la cantidad será a la vez un máximo y un mínimo.

¹¹⁵ Siempre que una cantidad que debe ser un máximo o un mínimo, incluya algún multiplicador o algún divisor, podemos suprimir este multiplicador o divisor al diferenciar.

¹¹⁶ Alguna vez sucede que una misma rama de curva después de haber girado su concavidad hacia un cierto punto, gira luego su convexidad hacia este mismo punto, continuando no obstante su marcha. Tal es la curva que hemos representado. El punto O donde se realiza el cambio, se llama punto de inflexión.

Pour déterminer les points d'inflexion simple, il faut différencier deux fois de suite l'équation de la courbe & supposer dans la seconde équation différentielle, $ddx=0$ & $ddy=0$ (p. 87)¹¹⁷

Como resumen, se establece que el método para calcular puntos de inflexión debe realizarse siguiendo los siguientes pasos:

1º Que puisqu'on trouve $dx=0$ la tangente au point d'inflexion de cette courbe est parallele aux ordonnées.

2º La méthode que l'on donne ordinairement pour trouver les points d'inflexion, consiste à différencier deux fois de suite l'équation, en supposant dx constant, & à égales ddy à zero ou à l'infini. Quoique cette méthode conduise aux mêmes résultats ; nous avons néanmoins évité de l'employer ; parce qu'en effet ddy n'est point infii, ainsi qu'on doit bien le voir parce qui précède. Ce qui est réellement infini alors, c'est la valeur de $\frac{ddy}{d^2x}$ & non pas ddy qui ne peut être zero dans les mêmes cas de points d'inflexion,

où l'on a coutume de supposer ddy infini, $\frac{ddy}{d^2x}$ est réellement $\frac{0}{0}$, qui en regardant zero comme une quantité infiniment petite, est en effet infini.

3º Si la courbe devoit avoir plusieurs points d'inflexion, l'équation finale donneroit plusieurs valeurs de x ; c'est -à-dire, qu'elle passeroit le premier degré. Cela arrive dans les courbes qui vont en serpentant comme dans la Figure 23.¹¹⁸ (p. 88)

El libro de Bézout corresponderá a una época de transición en la que se ha perdido prácticamente la visión geométrica de las magnitudes que tenían l'Hôpital y MacLaurin aunque queden algunas reminiscencias como hemos visto en relación con los puntos de inflexión. Se van introduciendo métodos algebraicos fundamentalmente en relación con el establecimiento de reglas generales para el cálculo de los puntos críticos al igual que ha hecho Euler, aunque de una forma bastante más simple y menos elaborada y algunas de las definiciones empiezan a introducir ciertos elementos aritméticos.

¹¹⁷ Para determinar los puntos de inflexión simple, tenemos que diferenciar dos veces seguidas la ecuación de la curva y suponer que la segunda ecuación diferencial es $ddx=0$ y $ddy=0$.

¹¹⁸ 1º. Como tenemos que encontrar $dx=0$, la tangente en el punto de inflexión es paralela al eje de ordenadas. 2º El método que damos normalmente para encontrar los puntos de inflexión, consiste en diferenciar dos veces seguidas la ecuación, y suponiendo dx constante, igualar ddy a cero o a infinito. Aunque este método conduce a los mismos resultados, nosotros hemos, sin embargo, evitado emplearlo; porque en efecto ddy no es un punto infinito, así que debemos ver por cuál se precede. El que es realmente infinito, entonces, es el

valor de $\frac{ddy}{d^2x}$ y no el de ddy el que no puede ser más que cero, en este caso como en los otros; & como dx es cero en el mismo caso de los puntos de inflexión, donde tenemos la costumbre de suponer ddy infinito, $\frac{ddy}{d^2x}$ es realmente $\frac{0}{0}$ y considerando cero como una cantidad infinitamente pequeña, es en efecto infinito.

3º Si la curva debe tener varios puntos de inflexión, la ecuación final dará varios valores de x , es decir, pasaría el primer grado. Así tenemos las curvas que van serpenteando como en la figura 23.

E) Aplicaciones a la Geometría y a la Aritmética.

Las aplicaciones las podemos clasificar en cuanto a que el enunciado describa verbalmente una situación matemática, o bien se plantee como simple ejercicio de aplicación de reglas a la ecuación algebraica de una función. Los siguientes ejemplos corresponden al primer grupo. El problema siguiente, es un clásico que hemos encontrado en el libro de l'Hôpital con un enunciado que aludía a un contexto geométrico, y que encontraremos en otros libros, pero al igual que en el libro de Bézout, en un contexto aritmético en el que un número se divide en dos cantidades, a partir de las cuales se crea otra cantidad para la que hay que encontrar su máximo o su mínimo.

Proposons nous d'abord de partager un nombre donné a en deux parties, telles que leur produit soit plus grand qu'en le partageant de toute autre manière¹¹⁹ (p. 62)

La solución del problema anterior nos sugiere que hay que dividir el número a la mitad. Este problema se puede generalizar si la cantidad que se forma se hace a partir de potencias de las dos que se han obtenido al dividir el número de partida:

Partager un nombre connu a , en deux parties telles que le produit d'une puissance déterminée de l'une des parties, par la même ou une autre puissance de l'autre partie, soit le plus grand qu'il est possible¹²⁰. (p. 63).

Si a partir del número a se obtienen dos partes x , $x-a$ y se quiere que $x^n(x-a)^m$ sea máximo, la solución es $x = \frac{ma}{m+n}$ que aplicándola al caso en que $m=2$ y $n=3$, se obtiene una solución particular que ejemplifica el tipo de resultados que se pueden obtener y permite comparar las dos cantidades en que se divide el número en un caso concreto. Ambos problemas tratan de situaciones generales, en el sentido de que no es un número concreto el que se divide sino cualquier número, pero luego se pueden ejemplificar en casos concretos y estudiar el tipo de soluciones que se obtienen **(d)**.

Además, si en lugar de considerar un producto, consideramos un cociente tendremos la siguiente situación :

Si l'on demandoit de partager la ligne AB au point C de manière que le carré de la distance AC au point A, étant divisé par la distance au point B, donne le plus petit quotient possible...¹²¹ (p. 66)

Se incluye esta situación para mostrar que se puede obtener un resultado que no tiene sentido, ya que se alcanza un mínimo para $x=0$ y un máximo para $x=2a$, obteniéndose además un valor máximo que es negativo y que dado el carácter geométrico **(d)** de la

¹¹⁹ Nos proponemos dividir un número dado a en dos partes, tal que el producto será el más grande de los que se obtienen partiendo de cualquier otra manera.

¹²⁰ Dividir un número conocido a en dos partes, tal que el producto de una potencia determinada de una de las partes, por la misma u otra potencia de la otra parte, sea el más grande de los posibles.

¹²¹ Si pedimos dividir la línea AB en un punto C de manera que el cuadrado de la distancia AC al punto A dividido por la distancia al punto B, dé el menor cociente posible

situación carece totalmente de sentido, ya que en bajo esta suposición, si a es la distancia entre AB, el punto C puede pertenecer al segmento en cuestión. Al contrario que los ejemplos anteriores, en lugar de dividir un número en dos partes, se trata de dividir un segmento, con lo que se ha cambiado el tipo de contexto.

Otra situación planteada, igualmente en un contexto geométrico, es la siguiente:

Proposons-nous maintenant, de trouver entre toutes les lignes que l'on peut mener par un même point D donné dans l'angle connu ABC, quelle est celle qui forme avec les côtes de cet angle, le plus petit triangle possible¹²². (p. 68)

Este es un problema de área mínima, es decir, cuando se pide encontrar el triángulo más pequeño posible se supone que se está planteando que dicho triángulo tiene que tener el menor área posible. La solución se obtiene mediante un razonamiento puramente geométrico que además permite construir la recta en cuestión.

Otro de los problemas clásicos es el siguiente en el que se trata de buscar el triángulo de mayor área dado su perímetro y la base.

Cherchons, maintenant, entre tous les triangles de même contour & de même base, quel est celui qui a la plus grande surface¹²³. (p. 72)

Se obtiene como solución un triángulo isósceles, y a partir de esta solución, se plantea el caso de hallar entre todos los triángulos de perímetro dado, cuál es el que tiene mayor área, obteniéndose un triángulo equilátero. Es sorprendente cómo a partir de un problema, se plantean otros a los que se aplica la solución ya obtenida (**d**). Esto no se hace sólo cuando se trata de figuras bidimensionales, sino también a partir de los que se refieren a figuras tridimensionales, así para el siguiente problema:

Cherchons maintenant parmi tous les parallépipèdes de même surface & de même hauteur, quel est celui qui a la plus grande capacité¹²⁴. (p. 69)

La solución que se obtiene es la de un paralelepípedo de base cuadrada, y a partir de él, se plantea otro consistente en calcular la altura de un paralelepípedo de base cuadrada para la que el volumen es máximo, y se obtiene un cubo.

F) Ejercicios relativos a ecuaciones algebraicas.

En relación con los puntos máximos y mínimos, Bézout plantea su cálculo en relación con la ecuación relativa a una circunferencia expresada en forma implícita

¹²² Nos proponemos encontrar entre todas las líneas que podemos hacer pasar por un punto dado D en el ángulo ABC, cuál es la que forma con los lados de este ángulo, el triángulo más pequeño posible.

¹²³ Busquemos entre todos los triángulos con el mismo contorno y la misma base aquel de ellos que tiene la mayor superficie.

¹²⁴ Busquemos entre todos los paralelepípedos con la misma superficie y la misma altura, aquel de ellos que tiene la mayor capacidad.

$$yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb \text{ (p. 58),}$$

y una cúbica dada en su forma explícita

$$y = \frac{x^2(a-x)}{aa} \text{ (p. 61)}$$

La primera resulta un tanto extraña puesto que todos los puntos de la curva están a la misma distancia del centro, pero no se está considerando dicha curva como objeto geométrico, sino más bien algebraico **(e)** con lo que su representación vendrá determinada respecto de un eje de coordenadas, que es a partir del que determina si un punto es máximo (mínimo) o no.

En cuanto a los puntos de inflexión, también se plantea algún ejemplo en el que se proporciona la expresión simbólica de la función:

Prenons pour exemple, la courbe qui a pour équation $x^3 - by^2 = a^3$ (p. 87)

Prenons pour second exemple, la courbe qui a pour equation $y = a + (x-a)^{3/5}$ (pp. 87-88).

En el primer caso se trata de una función implícita y en el segundo el punto de inflexión se obtiene cuando se iguala el denominador de la diferencial segunda a cero, es decir, dicha diferencial es igual a infinito y se obtiene para $x=0$. Es decir, se presenta un ejemplo para cada uno de los dos casos que se han estudiado teóricamente.

3.4.4.2.- Gráficas.

Se incluyen dos tipos de gráficas: las que hemos agrupado dentro del calificativo de cartesianas, son de tipo **ideograma** y en ellas se representa el concepto que se quiere estudiar o analizar junto con ciertos elementos gráficos (rectas tangentes, subtangentes, triángulos infinitesimales) que ilustran, mediante comparación, los criterios que permiten establecer si se tiene un punto extremo **(g)**; otro tipo de gráficas, son imágenes que ilustran una situación, cuestión, problema o ejercicio que se discute a lo largo del texto y que ejerce la función de servir de icono respecto del enunciado planteado, de forma que, señalando en la figura puntos clave, se puede llevar a cabo un razonamiento de tipo geométrico para ir construyendo la ecuación de la curva que se trata de maximizar o minimizar **(g)**. Ambos tipos de gráficas se incluyen en láminas desplegadas, como era usual en la época, al final del texto y agrupadas con otras gráficas para completar cada lámina. Están numeradas consecutivamente, de forma que cuando se hace referencia a ellas a lo largo del texto, simplemente se nombran utilizando el cardinal que les corresponde.

A) Gráficas cartesianas.

Son gráficas en las que se hace uso, tanto del eje de abscisas, como del eje de ordenadas, que se levanta verticalmente respecto del anterior. Para representar una curva, se levantan líneas verticales respecto del eje de abscisas, que representan las distintas ordenadas, por ejemplo, en el caso del círculo se indica expresamente que:

B) Gráficas que traducen un enunciado.

En algunas ocasiones, como se ha señalado anteriormente, en lugar de representar la curva definida por el enunciado de un ejercicio, lo que se representan son los datos que están incluidos en dicho enunciado. Tal es el caso de la gráfica siguiente de un segmento horizontal AB que se divide por un punto C de forma que un determinado cociente sea mínimo:

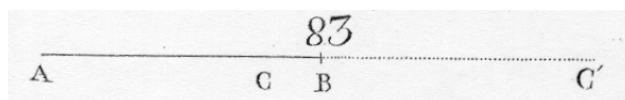


Fig. 3.35 Dividir un segmento en dos partes

Incluso esa misma gráfica se alarga del lado correspondiente a B para indicar que la solución, aunque carente de sentido, se podría interpretar mediante la realización de esa prolongación que daría cierto significado a la solución encontrada.

3.4.4.3.- Expresiones simbólicas.

Todas las expresiones simbólicas incluídas en la representación gráfica de curvas, hace alusión a los diferentes elementos (abcisas, ordenadas, origen,...) que las configuran siendo la misma que describe Descartes en su *Geometrie* y que ya hemos comentado en relación con el libro de l'Hôpital. Todas las expresiones de curvas representan familias de funciones, en las que x representa la abscisa AP, y la ordenada correspondiente PM, $a=AB$ es la magnitud del eje horizontal sobre el que se representa la función que también interviene en la expresión simbólica, como podremos constatar en las expresiones que aparecen a continuación, quizá su inclusión sea para que la ecuación resulte homogénea, en el sentido de que ambos miembros de la igualdad sean del mismo grado **(e)**. Todas las expresiones representan funciones racionales, destacando la gran presencia de las funciones cuya expresión algebraica está dada de forma implícita **(e)**.

La única expresión simbólica que se utiliza y que proviene de un entorno geométrico, se refiere a una circunferencia y está dada de forma implícita. De dicha expresión no se deduce directamente ni el centro ni el radio y actualmente no se considera una función:

$$yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb \text{ (p.58)}$$

Aunque Bézout se refiere a ella como la expresión algebraica de un círculo y asocia la expresión algebraica con la imagen visual que se obtiene de ella, justificándola, ya que se indica expresamente:

En supposant les x & les y perpendiculaires entr'elles, appartient au cercle (p. 58)

en realidad se maneja como expresión simbólica, es decir, algebraicamente, olvidándose del carácter geométrico que posee. Dicha función se diferencia como función implícita, se

calcula la razón entre las diferenciales $\frac{dx}{dy}$ y posteriormente se igualan consecutivamente el numerador y el denominador a cero, de forma que se obtienen dos soluciones de cada ecuación, correspondientes a sendos puntos máximos y mínimos. Los puntos extremos que se obtienen cuando se anula el numerador Q y Q' corresponden a las abscisas $x=a$ y $x=2a$ y los denomina *límites* de las abscisas porque:

Entre Q & Q', à chaque abscisse AP répondent des valeurs réelles PM & PM' pour y ; au lieu qu'entre Q & A, & au delà de Q' par rapport à A, il n'y a aucun point de la courbe, en sorte que si on suppose x plus petit que AQ ou a, ou bien plus grand que AQ' ou 2a, on ne trouve aucune valeur réelle pour y¹²⁶. (Bézout, p. 59)

De forma similar, considera los límites de las ordenadas, llamando en este caso a los puntos extremos T y T', los cuales se obtienen cuando $y = b + \frac{1}{2}a$ e $y = b - \frac{1}{2}a$. Además se deduce que la ordenada ST' es la mayor, que remata la concavidad RT'R' de la circunferencia; la ordenada ST es la menor de todas las que rematan la convexidad; y las ordenadas QR, QR' son a un tiempo las menores que rematan en la concavidad, y las mayores que rematan en la convexidad. De esta forma con este método se determinan:

1° à déterminer les limites de abscisses & des ordonnées ; 2° à déterminer dans quels cas la tangente devient parallele aux abscisses, ou aux ordonnées ; 3° enfin, à déterminer les plus grandes & les plus petites abscisses ou ordonnées¹²⁷. (p. 61)

Además de la circunferencia, que podemos considerar como curva clásica, se utilizan expresiones simbólicas correspondientes a otras curvas, decantándose el estudio que hace más hacia la expresión que hacia su significado. Así, se indica que cualquier expresión algebraica se puede considerar como representante de las ordenadas de una curva:

Or, de quelque maniere qu'une quantité soit exprimée algébriquement, on peut toujours regarder l'expression algébrique qui la représente, comme étant celle de l'ordonnée d'une ligne courbe¹²⁸. (p. 61)

Todas las expresiones consideradas son funciones polinómicas o racionales, siendo algunas de ellas generalizaciones de otras:

$$\frac{x^2 \times (a-x)}{aa} \text{ (p. 61); } x^m(a-x)^n \text{ (p. 63); } \frac{x^2}{a-x} \text{ (p. 66); } 2hx+2hy+2xy=cc \text{ (p.70)}^{129}$$

¹²⁶ Entre Q y Q', a cada abcisa AP corresponden dos valores reales PM & PM' para y; en un lugar entre Q & A, & más allá de Q' en relación a A, no hay ningún punto de la curva, de forma que si suponemos x mas pequeña que AQ o a, o bien más grande que AQ' o 2a, no encontramos ningún valor real para y.

¹²⁷ 1° para determinar los límites de las abcisas y de las ordenadas; 2° determinar en qué casos la tangente es paralela a a las abcisas o a las ordenadas; 3° en fin, para determinar las abcisas más pequeñas y más grandes.

¹²⁸ De cualquier forma que una cantidad sea expresada algebraicamente, podemos considerar dicha expresión algebraica que la representa, como la de la ordenada de una curva.

Por último, para calcular los puntos de inflexión utiliza como expresiones sobre las que practicar el método utilizado:

$$x^3 - by^2 = a^3 \text{ (p. 87); } y = a + (x - a)^{\frac{3}{5}} \text{ (p. 88)}$$

La última de ellas ya fue utilizada con anterioridad por l'Hôpital, pero en el libro de Bézout se maneja igual que cualquier otra expresión simbólica.

3.4.5.- Conclusiones.

3.4.5.1.- Análisis socio-cultural.

- CIA1: Aunque el siglo XVIII no fue un momento en el que destacaron las universidades francesas, si lo hicieron las academias, escuelas politécnicas y militares, para las que fue escrito este libro como libro de texto.
- CIA5: Destacaron sus estudios sobre las ecuaciones algebraicas, lo que se pone de manifiesto a lo largo de este libro por su inclinación a estudiar directamente estas ecuaciones, sin tener en cuenta el entorno geométrico del que pudieran provenir.
- CEM1: Este manual se puede englobar dentro del género de Cours de mathématiques, es decir, el de una enciclopedia en varios volúmenes con los que se cubría la matemática o una de sus ramas desde el nivel más elemental hasta el más avanzado. En particular, este volumen está dividido en dos partes en la primera de las cuáles se incluyen los principios del Cálculo, y la segunda está dedicada exclusivamente a la Mecánica.
- d: Aunque el objetivo del libro es el estudio de la Mecánica, los tipos de aplicaciones se refieren fundamentalmente al estudio de ecuaciones algebraicas y situaciones aritméticas, siendo muy escasos los ejemplos relacionados con elementos geométricos, que, cuando se incluyen, se traducen a una ecuación algebraica. Podemos considerar que hay, por ello, un énfasis centrado en el estudio de las ecuaciones de tipo algebraico, lo que produce una práctica descontextualización de las situaciones planteadas.

3.4.5.2.- Análisis epistemológico.

- CIA4: La repercusión que tuvo esta obra fue muy grande puesto que se hicieron numerosas ediciones y traducciones que fueron utilizadas en diversos países. Junto con Lacroix, son considerados los dos autores que produjeron los libros de texto más utilizados dentro y fuera del país, con lo que los resultados que obtuvieron los matemáticos franceses durante el siglo XVIII fueron ampliamente divulgados a través de estas obras.

¹²⁹ Corresponde al área lateral de un paralelepípedo.

- CEM3: A partir de las nociones de cantidades infinitas e infinitamente pequeñas se establece la noción de diferencia, las reglas del cálculo de las funciones elementales, el cálculo de máximos y mínimos, los puntos de inflexión y se continua con el estudio de la integración y la resolución de algunas ecuaciones diferenciales.
- d: Los conceptos de cantidades infinitas e infinitamente pequeñas son considerados conceptos relativos y la noción de diferencia o diferencial de una cantidad posee todavía un sentido dinámico, como el crecimiento o disminución de esta cantidad. A pesar de esos restos, la definición de máximo y mínimo remite a la comparación de cantidades desde un punto de vista aritmético y las reglas para el cálculo de puntos críticos tienen un marcado carácter algebraico que ya fue iniciado en el libro de Euler. En cambio, la definición de punto de inflexión hace alusión a la representación gráfica de la curva, identificándolo con el cambio de convexidad de ésta.
- e: Las expresiones simbólicas utilizadas son exclusivamente algebraicas, lo que contrasta con el objetivo del libro de la aplicación de los conceptos del Análisis a la Mecánica. Se mantienen ciertos arcaísmos como la utilización de la expresión implícita, sobre todo si se refieren a curvas clásicas o utilizadas anteriormente en otros libros, como es el caso de la circunferencia y de la curva $x^3 - by^2 = a^3$, y el uso de expresiones homogéneas en ambos lados de la igualdad. Casi todas ellas corresponden a familias de funciones con lo que los resultados son generales y se pueden aplicar a diversos casos particulares. Hay que destacar el papel tan importante que cumplen las expresiones simbólicas en este libro.

3.4.5.3.- Análisis didáctico.

- CIA3: El énfasis puesto en la Mecánica y en la última sección dedicada a la navegación concuerda perfectamente con el uso de este libro en las academias militares.
- CEM2: La primera parte del libro está dedicada a establecer los principios del Cálculo mientras que la segunda se refieren a las aplicaciones principalmente a la Mecánica.
- CEM4: El libro está escrito en francés y la impresión es similar a la utilizada en los libros anteriormente estudiados, estando, al igual que en ellos, los conceptos resaltados en cursiva e incluyendo láminas desplegables con las gráficas de las curvas estudiadas.
- d: Este libro puede considerarse un libro de transición en el que, aunque todavía se mantienen algunas alusiones a la Geometría, el énfasis está puesto en el estudio de las ecuaciones algebraicas y se empiezan a introducir algunos elementos aritméticos.
- g: Las gráficas se utilizan tanto como ideogramas para identificar los puntos críticos, como ilustraciones de los elementos o datos de un ejemplo, problema o ejercicio, que

sirve de icono respecto del enunciado señalando los elementos claves para que, a partir de ellos y por medio de un razonamiento puramente geométrico, se pueda establecer la ecuación algebraica adecuada.

3.5.- *Principios de matemáticas* de Benito Bails (1772).

3.5.1.- Ficha de referencia de la obra.

Autor: Benito Bails

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: 1730-1797.

Título: Principios de matemáticas de la Real Academia de San Fernando, Tomo II

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1772, Madrid: Imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1797, tercer edición, Madrid: Imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra

Localización del manual utilizado: Biblioteca General de la Universidad de Salamanca. 39408

3.5.2.- Contextualización e intencionalidad del autor.

Benito Bails nacido en San Adrián de Besós, completó su formación en Francia (**CIA2**), siendo desde 1768 profesor de matemáticas y realizando una gran labor de divulgación de las ciencias exactas en España, publicando diversos libros de texto como *Elementos de matemáticas* 1772-1783, *Principios de matemáticas donde se enseña la especulativa con su aplicación a la dinámica, la hidrodinámica, la óptica, astronomía, geografía, gnomónica, arquitectura, perspectiva y al calendario*, 1776 (Madrid: Joaquín Ibarra) e *Instituciones de geometría aplicada*, 1795 (**CIA5**). Su obra básica, *Principios de matemáticas*, en la que introduce por primera vez en España de forma didáctica el Cálculo Infinitesimal (**CIA1**), sirvió de libro de texto en numerosos centros y fue estudiada por casi todos los matemáticos españoles que se formaron a fines del siglo XVIII. Fue además presidente de la Real Academia de San Fernando y miembro de Reales Academias Españolas de la Historia y de las Ciencias Naturales y Artes de Barcelona.

En esta obra copia con frecuencia a Etienne Bézout, razón por la cual se incluye sólo un pequeño resumen de las diferencias que introdujo Bails en este libro de texto. El libro analizado corresponde al tomo dos que trata del estudio del álgebra, del que considera que:

...me tocaba declarar aquí los del Álgebra. Decláralos con efecto, pero los aplico a mayor número de asuntos y cuestiones que no en la primer edición de estos Principios, donde, atendidas las miras con que escribo, confieso que me quedé muy corto, cortísimo. Diestro algebrista, diestro calculador, diestro matemático son el día de hoy expresiones sinónimas; matemático docto es aquel que tiene en la memoria más

fórmulas o expresiones generales, esto es, de aquellas que encierran la resolución de una infinidad de cuestiones particulares. (pp. II-III)

El objetivo del libro es por lo tanto el estudio del álgebra, de las fórmulas y las expresiones generales, lo que va a marcar todos los contenidos que aparecen en él (CIA3).

3.5.3.- Caracterización y estructura del material.

La obra tiene 446 páginas (**CEM1**) en las que se abarcan contenidos relativos al Álgebra, la Geometría, el Cálculo Diferencial e Integral y la Trigonometría esférica, con lo que encaja perfectamente bajo el epígrafe de enciclopedia. En cuanto a lo que corresponde al Cálculo Diferencial incluye la noción de diferencia, las diferenciales de diferentes órdenes, las diferenciales logarítmicas y de funciones trigonométricas, la aplicación del Cálculo diferencial a las series y a las líneas curvas, al cálculo de máximos y mínimos, de evolutas, radios osculadores y puntos de inflexión (**CEM2, CEM3**).

Las características de la impresión son similares a las del libro de Bézout.

3.5.4.- Representaciones.

3.5.4.1.- *Descripciones.*

Como hemos dicho anteriormente, para no repetirnos demasiado sólo incluimos aquellas consideraciones que suponen una diferencia respecto del libro de Bézout.

A) Definiciones.

Aunque Bails parte de la noción de diferencia, si define lo que se entiende en relación la expresión $\frac{dx}{dy}$ que se asocia con la tangente del ángulo que forma la curva con el eje de abscisas en ese punto (**d**). Es la primera vez que vemos incluida esta definición en un libro de texto.

Expresa $\frac{dx}{dy}$ la tangente del ángulo que la curva causa con la ordenada en cualquiera de sus puntos ; y $\frac{dy}{dx}$ expresa la tangente del ángulo que la curva causa con el eje de las abscisas. (p. 349).

Además, en el libro de Bails se razona y se utiliza el cociente diferencial $\frac{dx}{dy}$ como si fuera una división algebraica (**d**), de tal forma que para establecer la regla práctica para calcular los puntos estacionarios, se indica que:

Pero como el valor de un quebrado es cero siempre que su numerador es cero, síguese que $\frac{dx}{dy}=0$ siempre que $dx=0$ y que quando $dy=0$, también será $\frac{dy}{dx}=0$; como dx es el numerador, y dy el denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, hemos de inferir que la tangente de una curva es paralela a las ordenadas o a las abscisas de la curva, conforme en el quebrado $\frac{dx}{dy}$ sea cero el numerador o el denominador. Por consiguiente para manifestar en que punto ó puntos tiene una curva su tangente paralela a las ordeadas ó á las abscisas, se sacará de su equación diferenciada el valor de $\frac{dx}{dy}$, se hará el numerador igual con cero, y se sacará una equación, la qual, comparada con la equación de la curva, dará el valor de x é y correspondiente al punto de la curva, donde la tangente es paralela á las ordenadas. Si se supusiese=0 el valor de dy ó del denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, se sacaría otra equación, la qual, combinada con la de la curva, dará los valores de x é y correspondientes al punto de la curva donde la tangente es paralela al exe de las abscisas. (p. 350).

Las definiciones que establece Bails en relación con los puntos máximos, mínimos y de inflexión son idénticas a las ya comentadas de Bézout.

B) Aplicaciones geométricas.

Los problemas relativos a áreas máximas son bastante frecuentes y generalmente están relacionados con triángulos o rectángulos:

Determinar el rectángulo máximo que se pueda inscribir en un triángulo dado ADC (p. 356)

Determinar entre muchos triángulos rectángulos, que tienen una misma hypotenusa dada, el de la máxima superficie. (p. 356)

Para averiguar la función que hay que maximizar, se razona sobre triángulos semejantes de forma similar a como se hace actualmente. Las soluciones que se obtienen son : en el primero que el rectángulo máximo que se puede inscribir en el triángulo es aquel cuya altura es la mitad de la altura del triángulo y en el segundo un triángulo rectángulo cuyos dos catetos son iguales.

Otros problemas plantean situaciones en las que hay que minimizar el perímetro:

Hallar entre todos los triángulos rectilíneos rectángulos de una misma área, uno tal que la suma de sus lados sea la menor posible. (Bails, p. 356)

Por último, algunos problemas están relacionados con los cuerpos geométricos de tres dimensiones, en los que los cuerpos más habituales son los cilindros y los conos:

Determinar el cilindro máximo que se pueda inscribir en un cono dado. (p. 358)

Hallar las dimensiones de una medida cilíndrica tal, que con la menor superficie interior posible, tenga una cabida determinada, esto es, que quepa en ella una cantidad determinada de agua, trigo, &c. (p. 359)

Determinar entre todos los conos de una superficie dada, el que tiene la mayor solidez. (p. 360).

En el primero, la solución es un cilindro cuya altura es un tercio de la altura del cono. En el segundo, se obtiene un cilindro para el que el diámetro es igual al doble de la altura. Es de resaltar en relación con el resto de los libros clásicos que hemos analizado, la referencia que se hace a la posible utilidad práctica del cuerpo geométrico, que aunque se resuelve mediante un razonamiento puramente matemático, se hace una alusión a la aplicación a la vida cotidiana. En cuanto al último problema, destaca el término “solidez” para referirse al volumen de un cuerpo geométrico siendo la solución:

el cono mayor entre todos los de una misma superficie dada, es aquel cuyo lado obliquo tiene con el semidiámetro de la base la misma razón que 3 con 1 pues de $y=3x$ sale $y:x::3:1$ (Bails, p. 361).

C) Aplicaciones referidas al estudio de ecuaciones algebraicas.

Al igual que en el libro de Bézout, se analizan diversas ecuaciones algebraicas como la circunferencia y otras similares que aparecen en dicho libro. La única diferencia la hemos encontrado en relación con el cálculo de puntos de inflexión, para los que propone una función algebraica expresada de forma implícita que diferencia dos veces y que, a partir de la solución de las ecuaciones correspondientes a $ddx=0$ y $ddy=0$, calcula dichos puntos:

Hallar el punto de inflexión de la curva AFK, cuyo diámetro es AB ; la abscisa AE, x ; la ordenada EF, y ; y la equación $axx=xy+aay$ (Bails, p. 371)

Este mismo ejercicio con la misma ecuación de una curva se ha planteado en el libro de L'Hôpital anteriormente.

3.5.4.2.- Gráficas.

Las gráficas son relativas tanto a ideogramas como a la representación de los datos correspondientes a un problema al igual que hacía Bézout.

A) Gráficas cartesianas.

La siguiente gráfica, está relacionada con un ejemplo más que con la propia definición de punto de inflexión. Representa la curva $axx=xy+aay$ y es idéntica a una encontrada en el libro de l'Hôpital.

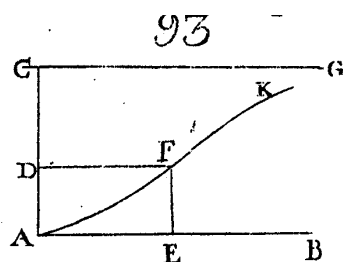


Fig. 3.36 Gráfica con un punto de inflexión.

La representación gráfica sólo corresponde al primer cuadrante siendo la curva simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir, que tiene dos puntos de inflexión aunque en la gráfica anterior sólo se visualice uno de ellos.

B) Gráficas que traducen un enunciado.

La siguiente gráfica se utiliza para representar el enunciado planteado en uno de los problemas resueltos, en el que se trata buscar un rectángulo inscrito en un triángulo de forma que el área del rectángulo sea máximo:

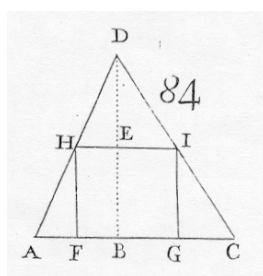


Fig. 3.37 Rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo.

En la gráfica se identifican mediante letras mayúsculas los vértices de las figuras así como algunos puntos de intersección que se utilizan para construir la ecuación algebraica de la curva que ilustra la situación planteada.

De forma similar se utiliza la siguiente figura correspondiente a un triángulo rectángulo:

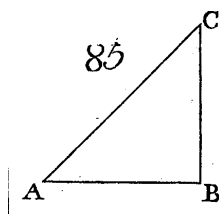


Fig. 3.38 Triángulo rectángulo de área dada y perímetro mínimo.

También se utilizan gráficas de este tipo para representar figuras tridimensionales:

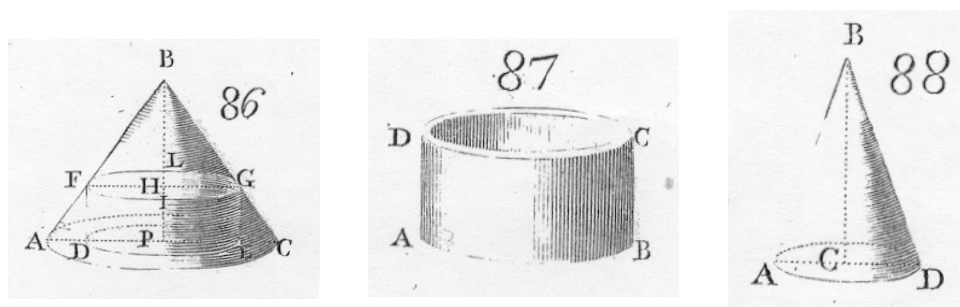


Fig. 3.39 Cuerpos tridimensionales.

A partir de los puntos seleccionados en dichas figuras se construyen las respectivas ecuaciones algebraicas que permiten resolver los problemas planteados.

3.5.4.3.- Expresiones simbólicas.

En el libro de Bails las expresiones simbólicas utilizadas son tanto explícitas como implícitas. Algunas de ellas son de tipo polinómico:

$$y=ax-xx \text{ (p. 355); } \frac{pabx^2 - pax^3}{b} \text{ (p. 359)}^{130}$$

Otras son funciones racionales:

$$x + \frac{2a}{x} \text{ (p.357); } \frac{4c}{x} + \frac{px^2}{4} \text{ (p. 360)}^{131}$$

También se incluyen algunas funciones cuya expresión algebraica es de tipo irracional. Normalmente estas funciones aparecen siempre que se utilizan triángulos en los razonamientos, cuando se aplica el teorema de Pitágoras para asignar una expresión a una determinada magnitud, tal es el caso de:

$$\frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ (p. 356); } \frac{px^2}{3} \sqrt{\left(\frac{s^2}{p^2 x^2} - \frac{2s}{p}\right)} \text{ (p. 360)}^{132}$$

¹³⁰ Expresión algebraica correspondiente al volumen de un cilindro.

¹³¹ Expresión algebraica relativa al área lateral de un cilindro.

¹³² Expresión algebraica correspondiente al volumen de un cono.

3.5.5.- Conclusiones.

3.5.5.1.- *Análisis socio-cultural.*

- CIA1: Este libro fue escrito en España realizándose junto con otros similares una gran labor de divulgación de las ciencias exactas, en un momento en el que se necesitaban dichos conocimientos para la formación en las Academias militares.
- CIA2: El autor recibió su formación en Francia, lo que le permitió conocer de primera mano los descubrimientos realizados por los matemáticos de dicho país y estar al día en los métodos más actuales relativos a esta rama de las matemáticas.
- CIA5: Escribió otros libros de texto que permitieron formar a los matemáticos españoles en el tipo de conocimientos que se manejaban en el resto de Europa.
- CEM1: La estructura del libro es similar a la establecida por Bézout, es decir, se trata de una enciclopedia en la que se incluyen nociones relativas al Álgebra, la Geometría, el Cálculo Diferencial e Integral y la Trigonometría esférica.
- d: El libro de Bails se caracteriza por los numerosos ejemplos resueltos que incluye en el libro, que son similares a los utilizados por Bézout, pero entre los que se encuentran numerosos dedicados a la geometría tanto plana como espacial. Los problemas resueltos relacionados con ésta última, hasta ahora habían sido mas bien escasos, sólo los habíamos encontrado en el libro de l'Hôpital y en el de Bézout.

3.5.5.2.- *Análisis epistemológico.*

- CIA4: Este libro es prácticamente una traducción del libro de Bézout, salvo algún ejemplo que modifica del original o que introduce nuevo. Hay que resaltar la definición que da del cociente diferencial relacionándolo con la tangente trigonométrica del ángulo formado entre la tangente y el eje de abscisas. Es la primera vez que se incluye una interpretación geométrica de este cociente en los libros de texto que hemos analizado.
- d: A partir de la noción de diferencia, trata los diferenciales de diferentes órdenes, las diferenciales logarítmicas y de funciones trigonométricas, la aplicación del Cálculo Diferencial a las series y a las líneas curvas, al cálculo de máximos y mínimos, de evolutas, radios osculadores y puntos de inflexión.
- e: Las expresiones simbólicas son tanto implícitas como explícitas y como novedad se estudian funciones cuya expresión contiene radicales.

3.5.5.3.- Análisis didáctico.

- CIA3: El objetivo del libro es, por lo tanto, el estudio del álgebra, de las fórmulas y las expresiones generales, lo que va a marcar todos los contenidos que aparecen en él.
- CEM2: La estructura del libro corresponde a la de un manual en el que los contenidos se han seleccionado de forma que aparezcan en una secuencia lógica, incluyendo algunos ejemplos que permitan ver tanto su manejo como sus aplicaciones. Por lo tanto, el libro está centrado en los aspectos de tipo teórico, constituyéndose, de esta forma, un cuerpo de conocimientos.
- CEM4: Es similar al libro de Bézout.
- d: Las definiciones que se ofrecen de los puntos críticos organizan el conocimiento de éstos de una forma algebraica, poniéndose mucho énfasis en las reglas del cálculo.
- g: Son similares a las utilizadas por Bézout, incluyendo, no obstante, las relativas a los cuerpos geométricos para ilustrar los problemas correspondientes.

3.6.- *Théorie des fonctions analytiques* de Joseph Louis Lagrange (1797).

3.6.1.- Ficha de referencia de la obra

Autor: Joseph Louis Lagrange

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: 1736-1813.

Título: *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toutes considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.* (Teoría de las funciones analíticas, conteniendo los principios del cálculo diferencial, liberado de cualquier consideración sobre infinitesimales, magnitudes evanescentes, límites y fluxiones y reducido al análisis algebraico de las magnitudes finitas).

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1797, L'imprimerie de la République, París.

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1797, L'Imprimerie de la République, París.

Localización del manual utilizado: Biblioteca General de la Universidad de Salamanca. 40417 (Fondos de la Librería del Colegio de la Compañía de Jesús de Salamanca).

3.6.2.-Contextualización e intencionalidad del autor.

Entre 1736 y 1753 nacieron seis importantes matemáticos que estuvieron implicados en mayor o menor medida en la Revolución Francesa, son: Joseph Louis

Lagrange (1736), Jean A. N.C. de Condorcet (1743), Gaspar Monge (1746), Pierre Simon de Laplace (1749), Adrien Marie Legendre (1752) y Lazare N. M. Carnot (1753). De ellos Lagrange, Laplace y Legendre fueron los más importantes. Aunque Lagrange había nacido en Turín y fue allí donde recibió su formación, un poco alejado de los centros donde se estaba gestando el Cálculo Diferencial, hizo grandes contribuciones a esta rama de las matemáticas, por lo que le asignaron puestos prestigiosos tanto en Berlín como en París (**CIA2**).

La época de Lagrange está determinada por dos revoluciones: la Revolución Francesa y la Revolución Industrial (**CIA1**). Durante el periodo de la Revolución Industrial surgió un nuevo grupo de ciencias, el de las ciencias técnicas y de la ingeniería, que entraron en contacto con las ciencias naturales y las necesidades expansivas de las fuerzas productivas materiales, a pesar de que hasta comienzos del siglo XVIII habían sido desarrolladas sobre una base empírica. Estas ciencias técnicas encontraron su sitio en una nueva clase de centros científicos, los centros politécnicos, que deben su nacimiento a las exigencias sociales de la Revolución Industrial en ciencia y técnica. El modelo de todas las escuelas politécnicas y de todas las escuelas técnicas superiores que aparecieron posteriormente fue la École Polytechnique de París, que nació en 1794 e impuso unas normas completamente nuevas para la formación de la juventud matemático-científica, por supuesto de acuerdo con el marcado interés clasista de la burguesía francesa. Su éxito consistió en la orientación hacia las matemáticas y las ciencias naturales más avanzadas, y en la unión entre teoría y práctica. La enseñanza incluía numerosos ejercicios prácticos, con lo que se diferenciaba claramente de la carrera universitaria y de la vida científica de las academias de aquella época.

La École Polytechnique de París creció pronto por encima de sus objetivos nacionales. En las primeras cuatro décadas de su existencia, fue considerada centro líder en el mundo de la enseñanza y la investigación de las matemáticas y de las ciencias naturales. Lagrange, que fue profesor de la Ecole Normal y de la Polytechnique, trató de escribir un libro sobre cálculo diferencial, viendo las dificultades que sus alumnos tenían para entender las cantidades infinitesimales. En su libro precisa el concepto de función analítica que inicialmente se utilizó en el sentido de función que se emplea en Análisis, Lagrange fija este concepto como función construida mediante serie de potencias. Constituyó el primer intento de fundamentar con rigor el cálculo diferencial, de forma que definió la derivada de una función f en el punto x como el coeficiente de h , en el desarrollo en serie de potencias de h , de la función $f(x+h)$. Sin embargo, su intento fue vano al encontrarse con dos problemas: la convergencia de los desarrollos en serie de potencias, y la igualdad de estos desarrollos a la función $f(x+h)$ ¹³³. Precisamente, en este libro se encuentra la primera aparición del teorema del valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto de la fórmula de Taylor, que hoy conocemos como *expresión de Lagrange para el resto* (**CIA4**). En este libro también introdujo novedades en la notación

¹³³ La serie asociada a la función $F(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ tiene por suma sólo el primer término de la suma, como fue demostrado por primera vez por Cauchy.

que persisten en nuestros días: el nombre de función derivada aparece aquí por primera vez y también la notación f' para la derivada de la función f (CIA4).

La importancia que supuso Lagrange en la fundamentación del cálculo fue grande, de hecho Marx que mostró gran interés por el tema, distinguió tres periodos en la evolución de esta parte de las matemáticas: el cálculo diferencial místico de Leibniz y Newton, el cálculo diferencial racional de D'Alembert y el puramente algebraico de Lagrange. De este último dijo:

Lagrange tomó como punto de partida el teorema ... de Taylor, que es el más general y extenso, y al mismo tiempo una fórmula operacional del cálculo diferencial ...H.C. Kennedy. Karl Marx and the foundations of differential calculus, Hist. Math., 4 (1977), 303-318 (citado en Wussing, 1998)..

Lagrange tratará de evitar el uso de las cantidades infinitesimales sobre las que se fundamentaba el cálculo, y también evitó el uso de la notación dx . Definió directamente la derivada de una función f sin hacer uso de los infinitesimales, e ideó una nueva forma de denotarla: f' . También a partir de Lagrange se empezaron a usar las expresiones de función derivada y función primitiva:

Nous appellerons la fonction fx , *fonction primitive*, para rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, &c. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, para rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime*; la seconde dérivée $f''x$, *fonction seconde*; la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce*, et ainsi de suite¹³⁴ (pp. 14-15)

Lagrange afirmaba que toda función podía ser desarrollada en serie de Taylor

$$f(x+i) = a_0 + a_1i + \frac{1}{2!}a_2i^2 + \dots$$

de forma que sus coeficientes diferenciales (a los que llamaba funciones derivada), venían definidos como los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots$ en el desarrollo anterior. Lagrange añadía que estos coeficientes podían ser calculados por “unos métodos que están libres de cualquier consideración relativa a los infinitamente pequeños, a las cantidades evanescentes, a los límites y a las fluxiones, y que se reducen al análisis algebraico de cantidades finitas” (lo que indica claramente en el título de su libro). En la cita siguiente se puede observar cómo Lagrange aseguraba que dichos coeficientes se podían obtener por medios algebraicos:

On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard

¹³⁴ Consideremos la función $f(x)$, función primitiva, en relación con las funciones $f'(x)$, $f''(x)$, &c. que se derivan, y que llamaremos funciones derivadas en relación con aquella. Llamaremos además, la primera función derivada $f'(x)$, función primera; a la segunda derivada $f''(x)$, función segunda; a la tercer función derivada $f'''(x)$, función tercera, y así sucesivamente,...

aux constantes que peuvent y éter mêlées...Le mot fonction a été employer par les premiers analystes pour désigner en general les puissances d'une même quantité. Depuis on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité... Considerons donc une fontions fx d'une varibale quelconque x . Si à la place de x on met $x+i$ étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$, dans laquelle les quantités $p, q, r, \&c.$, coefficiens des puissances de i , seront de nouvelles fontions de x , dérivées de la fontion primitive fx , et indépendantes de la quantité i .

Il est clair que la forme des fonctions $p, q, r, \&c.$ dépendra uniquement de celle de la fonction fx ; et on déterminera aisément ces fonctions dan les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i . pp. 1-2¹³⁵

Lagrange demostró los teoremas básicos del cálculo, pero sólo pudo obtener las funciones derivadas, por métodos exclusivamente algebraicos, para el caso de funciones sencillas. A pesar de que el énfasis que puso en las series de potencias tuvo su influencia y su terminología, y sus notaciones tuvieron gran aceptación, pocos matemáticos adoptaron sus puntos de vista. El mismo Lagrange, durante su periodo de director de la sección matemática de la Academia de Berlín, anunció en 1784 la convocatoria de un premio para una “teoría clara y precisa de los que se llama infinito en matemáticas”:

Es bien sabido que la geometría superior emplea regularmente lo *infinitamente grande* y lo *infinitamente pequeño* ... La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios, así como... un principio verdaderamente matemático que pueda sustituir correctamente al del infinito... (Nouveaux mémoires de l'Academie Royale des Sciences, Arts et Belles –Letres, 1784 pp. 12-13).

3.6.3.- Caracterización y estructura de la obra.

La obra tiene 277 páginas y se divide en dos partes, la primera expone la teoría y los principales usos del Análisis y la segunda aplica la teoría a la Geometría y a la Mecánica (CEM1). Cada una de ellas está dividida en secciones o artículos numerados, en los que se exponen los resultados correspondientes a los diferentes conceptos. En los párrafos iniciales

¹³⁵ Llamamos *función* de una o de varias variables a cualquier expresión del cálculo en la que entran dichas cantidades de una manera arbitraria, mezcladas o no con otras cantidades que nosotros vemos como tomando los valores dados e invariables. Así en las funciones, no consideramos las cantidades que suponemos variables, sin consideración con las constante con las que pueden estar mezcladas ... La palabra *función* fue utilizada por los primeros analistas para denotar las potencias de una cantidad general. Desde entonces el significado de esta palabra se ha extendido para designar cualquier cantidad formada de una manera arbitraria a partir de otra cantidad ... Consideramos entonces una función $f(x)$ de una variable cualquiera x . Si en lugar de x ponemos $x+i$ siendo una cantidad cualquiera indeterminada, entonces tendremos $f(x+i)$; y por la teoría de las series podemos desarrollarla en una sucesión de esta forma $fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$, en la cual las cantidades $p, q, r, \&c.$ coeficientes de las potencias de i serán las nuevas funciones de x , derivadas de la función primitiva $f(x)=$ e independientes de la cantidad i .

Está claro que la forma de las funciones $p, q, r, \&c.$ dependerá unicamente de la de la función $f(x)$; y determinaremos fácilmente estas funciones en los casos particulares por las regls ordinarias del álgebra, desarrollando la función en una serie ordenada de potencias.

del primer libro hace un repaso histórico de las principales contribuciones realizadas hasta el momento en el Análisis Matemático, de hecho éste es un método que utiliza en todos los libros que escribió y por eso se recurre muchas veces a Lagrange como fuente histórica de los progresos, aportaciones y novedades que los matemáticos hicieron antes que él. Esta revisión, se centra en las dificultades y problemas ocasionados por las diferentes concepciones que han tenido los matemáticos hasta el momento de Lagrange, de esta forma se justifica este libro en el sentido de que fue escrito para solventar dichas dificultades y errores cometidos **(CIA3)**. De Leibniz y Bernoulli destaca que fueron los primeros en utilizar el término *función* como:

toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité.¹³⁶ (p. 1)

Para él, los primeros que desarrollaron el cálculo diferencial, fueron Leibniz, Bernoulli y l'Hôpital, los cuales basaron sus argumentos en la consideración de:

quantités infiniment petites de différens ordres, et sur la supposition q'on peut regarder et traiter comme égales les quantités qui ne diffèrent entre elles que par des quantités infiniments petites à leur égard.¹³⁷ (p. 2).

De esta forma, sólo se preocupaban de que los procedimientos de cálculo fueran rápidos y los resultados exactos, sin preocuparse de demostrar los principios. En cambio los que les siguieron como Euler, y D'Alembert intentaron suplir estas dificultades haciendo ver:

que les différences qu'on suppose infiniment petites, doivent être absolument nulles, et que leurs rapports, seules quantités qui entrent réellement dans le calcul, ne sont autre chose que les limites des rapports des différences finies, ou indéfinies.¹³⁸ (p. 3)

El caso de Newton es tomado en consideración en un párrafo específicamente dedicado a él, en el que se indica que, para evitar la utilización de los infinitamente pequeños, considera las cantidades matemáticas como engendradas por un movimiento y, a partir de ellas, determina directamente las velocidades, siendo denominado este método *cálculo fluxional*, que no se diferencia del cálculo diferencial más que en cuestiones de tipo metafísico. Las dificultades de este tipo de concepción estriban en que:

introduire le mouvement dans un calcul qui n'a que des quantités algébriques pour object, c'est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile,...il faut avouer qu'on n'a pas même une

¹³⁶ toda cantidad formada de una manera cualquiera con otra cantidad.

¹³⁷ cantidades infinitamente pequeñas de diferentes órdenes, y sobre la suposición de que podemos considerar como iguales, las cantidades que no difieren entre ellas más que en cantidades infinitamente pequeñas con respecto a ellas.

¹³⁸ que las diferencias que se supone que son infinitamente pequeñas, deben ser nulas, y que sus razones, que son las verdaderas cantidades que se utilizan en el cálculo, no son otra cosa que los límites de las razones de diferencias finitas o indefinidas.

idée bien nette de ce que c'est que la vitesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vitesse est variable...¹³⁹ (pp. 3-4)

Esta puntualización respecto del cálculo de fluxiones, se puede observar en el libro de MacLaurin, en él se ha constatado la dificultad de las demostraciones rigurosas que exige el método de fluxiones y cuántos artificios particulares se deben emplear para cada una de ellas.

Señala la contribución de John Landen con su obra de 1764 *The residual analysis, a new branch of the algebraic art*, en la que propone sustituir el método de fluxiones de Newton, que utilizaban todos los matemáticos ingleses, y la utilización de las diferencias infinitamente pequeñas, por un nuevo método en el que:

on emploie d'abord des valeurs différentes de ces quantités, qu'on égale ensuite, après avoir fait disparaître par la division le facteur que cette égalité rendroit nul¹⁴⁰. (p. 5)

Pero el inconveniente de este método, es que se pierden las principales ventajas de este cálculo: la simplicidad del método y la facilidad de las operaciones.

Finalmente, pasa a considerar los avances llevados a cabo en el desarrollo de las funciones en serie, destacando en este sentido, una memoria presentada por Arbogast a la Academia de Ciencias en la que se exponen tanto estos desarrollos como las aplicaciones que pueden ser pertinentes.

En cuanto a los contenidos que incluye en sus libros (**CEM2, CEM3**), inicia el primero de ellos con el concepto de función, su desarrollo en serie, la formación de los términos de la serie y la noción de función derivada. Utiliza toda la teoría de funciones analíticas, es decir, el desarrollo en serie de potencias de una función como el punto de partida para el desarrollo posterior (mientras que actualmente se presenta como un teorema o resultado de la teoría). Aplica estos desarrollos a las funciones x^n , a^x , $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ y calcula sus funciones derivadas. Amplía este concepto, al cálculo de funciones derivadas de distintos órdenes y al cálculo de la derivada de una función compuesta. Realiza el estudio correspondiente al cálculo del resto de una serie de potencias. Desarrolla un estudio referente a las ecuaciones diferenciales, inicialmente de primer orden y posteriormente de otros órdenes, deduciendo algunas propiedades características de las funciones primitivas que se obtienen. Pasa al desarrollo de funciones de dos variables y sus funciones derivadas, y generaliza al caso de varias variables, exponiendo un ejemplo correspondiente al caso de tres variables.

¹³⁹ Introducir el movimiento en un cálculo que no tiene más que cantidades algebraicas por objeto, es introducir una idea extraña que obliga a considerar estas cantidades como líneas recorridas por móviles.. el ha confesado que no da una idea neta de lo que es la velocidad de un punto en cada instante, cuando esta velocidad es variable.

¹⁴⁰ Empleamos en primer lugar valores diferentes de estas cantidades, que luego igualamos, después de haber hecho desaparecer por la división el factor que esta igualdad hace nulo.

El segundo libro, comienza con la aplicación de la teoría anterior a la Geometría, calculando tangentes para las que el punto de contacto es de diferente orden, calcula los círculos osculadores y averigua el lugar geométrico de sus centros. Aplica los resultados obtenidos para el caso de la parábola. Pasa al estudio de las asíntotas y al estudio de las cónicas. Desarrolla el método de cálculo de valores máximos y mínimos. Explica la solución a los problemas de medida de áreas, la longitud de arcos de una curva, la medida de volúmenes y de las superficies que los envuelven. Estudia los círculos osculadores y los centro de curvatura. Amplía este estudio a las superficies, las esferas tangentes, el cálculo de primitivas de ecuaciones de segundo orden en tres variables, y la ecuación de las superficies desarrollables. Pasa al estudio de los máximos y mínimos relacionados con superficies curvas, hasta desarrollar el cálculo de variaciones. En cuanto a la aplicación a la mecánica, trata el movimiento uniformemente acelerado, el movimiento rectilíneo general, la composición y descomposición de velocidades, la trayectoria de proyectiles y el movimiento curvilíneo, las ecuaciones generales de un movimiento, el movimiento de un cuerpo sujeto a ciertas condiciones o fuerzas, determinación del centro de gravedad, el movimiento de rotación alrededor de un centro o eje, de la conservación o de la pérdida de fuerza tras el choque de cuerpos elásticos o cuerpos duros y, finalmente, de la forma en que cada fuerza contribuye a aumentar la suma de las fuerzas, del valor de éstas en equilibrio y de la economía de fuerzas en las máquinas.

El libro está escrito en francés, y cada una de las dos partes está encabezada por una ilustración en la que se incluyen dibujos e instrumentos propios de las matemáticas (curvas, semicírculos, reglas, escuadras, cuerpos geométricos, representaciones de diversos teoremas como el de Pitágoras,...) junto con cenefas decorativas con elementos florales (CEM4). Cada parte viene numerada en letra mayúscula y titulada en cursiva. Los diferentes artículos de los que esta compuesto cada parte aparecen numerados. La primera letra del desarrollo de cada parte es de mayor tamaño que el resto. Los conceptos cuando se definen están escritos en letra cursiva. No aparecen gráficas ni láminas desplegadas, como era habitual hasta entonces.

3.6.4.- Representaciones.

En este libro, como se ha indicado anteriormente, no se incluyen ni gráficos de ningún tipo ni tablas correspondientes a las funciones, de hecho todas las funciones utilizadas en relación con los puntos críticos son funciones genéricas. Por ello sólo desarrollaremos los apartados correspondientes a las descripciones y a la expresiones algebraicas, y dentro del primero, como no se incluye ninguna aplicación, ejemplo o ejercicio, sólo se exponen aquellas definiciones, criterios o descripciones teóricas que se han encontrado en el libro.

3.6.4.1.- Descripciones.

Antes de dar las definiciones correspondientes a los puntos críticos, Lagrange recuerda la definición clásica de tangente a una curva, que según se utilizaba en la antigua Geometría era:

Une ligne droite est tangente d'une courbe, lorsqu'ayant un point común avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune autre droite entre elle et la courbe.¹⁴¹ (p. 117)

Tal como está desarrollada esta definición, en ella se incluyen dos al mismo tiempo, la clásica más est  tica utilizada principalmente en relación a una circunferencia según la cual la recta tangente y la curva sólo pueden tener un punto común, y aquélla más dinámica que señala que, al trazar dicha recta tangente, se impide el trazado de cualquier otra recta entre la tangente y la curva, y que fue utilizada por los ge  metros fundamentalmente en el desarrollo de las demostraciones. Pero dado el avance llevado a cabo hasta ese momento en relación con las funciones, dado que este campo se había ampliado enormemente y habían surgido, por lo tanto, nuevas situaciones que no podían ser contempladas por las definiciones anteriores, se dan tres nuevas definiciones alternativas de recta tangente a una curva, al considerar las curvas como pertenecientes al Análisis (y no a la geometría como en las anteriores):

On les a regard  es comme des sécantes don't les deux points d'intersection sont réunis, ou comme le prolongement des côtés infiniment petits de la courbe considérée comme un polygone d'une infinité de côtés, ou comme la direction du mouvement composé, par lequel la courbe peut être décrite; et ces d  ferentes man  res de considérer les tangentes ont donné lieu aux méthodes algébriques fondées sur l'  galit   des racines des équations, et aux méthodes différentielles fond  es sur le rapport des différences infiniment petites, ou des fluxiones des coordonnées.¹⁴² (p. 118)

La primera de las definiciones podemos considerarla como una prolongación o continuación de la forma de hacer geométrica, en el sentido de que hace uso de nociones exclusivamente de esta rama de las matemáticas, así considera la tangente como un tipo especial de recta secante (aquella para la que los dos puntos de corte con la curva est  n juntos). Es una definición que contempla los casos en los que dicha recta corta a la curva en más de un punto, pero en el punto que es de tangencia se comporta según dicha definición. Esta definición se sigue utilizando actualmente en la enseñanza secundaria como definición de recta tangente a una curva en un punto. En la segunda de las definiciones, compara la curva con un polígono de infinitos lados muy pequeños, los cuáles son indicadores de su curvatura en cada punto, en este caso se incorpora a la definición el uso de magnitudes infinitesimales, al estilo de los indivisibles de Cavalieri, y su consideración de las formas y los cuerpos curvos, como formados por rectángulos o cilindros de altura infinitesimal respectivamente. La última de las definiciones identifica la curva con la representación de un movimiento, con lo que parece que se está recordando la concepción newtoniana de las curvas, de forma que se da una interpretación de la recta tangente en relación con nociones basadas en el movimiento, en este caso con la dirección. A partir de estas definiciones,

¹⁴¹ Una línea recta es tangente a una curva, si sólo tiene un punto común con la curva, no podemos construir por dicho punto otra recta entre ella y la curva.

¹⁴² Nosotros las consideramos como las secantes donde los dos puntos de intersección est  n juntos, o como la prolongación de los lados infinitamente pequeños de la curva considerada como un polígono de una infinitud de lados, o como la dirección del movimiento compuesto, por el cual la curva puede ser descrita; y estas diferentes maneras de considerar las tangentes han dado lugar a los método algebraicos fundado sobre la igualdad de las raíces de las ecuaciones, y a los métodos diferenciales fundados sobre la razón de las diferencias infinitamente pequeñas, o de las fluxiones de las coordenadas.

utilizando el desarrollo en serie de una función, y basándose en que $f(x+i)$ es el valor de la función en un punto muy cercano a x , demuestra con métodos algebraicos que para que una curva sea tangente a otra en un punto, tienen que coincidir las ecuaciones de las funciones de dichas curvas en dicho punto, así como las de sus funciones derivadas primeras, como mínimo. Luego aplica este resultado al cálculo de la recta tangente a una curva en un punto, de forma que si una recta genérica tiene por ecuación $q=a+bp$, se obtiene como ecuación de dicha recta :

$$q=fx-xf'x+pf'x \text{ (con } a=fx-xf'x \text{ y } b=f'x)$$

o

$$q=y-xy'+py' \text{ (haciendo } y=fx \text{ e } y'=f'x)$$

siendo $y=fx$ la expresión simbólica de la función, p y q las coordenadas de los puntos de la recta, y x el punto en el que son tangentes y que, por lo tanto, es fijo. De esta forma, al ser $b=y'$, éste b representa la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas, y como $x+\frac{a}{b}=\frac{y}{y'}$, ésta será la expresión de la subtangente. De forma similar, calcula las ecuaciones de la recta normal y de la subnormal, y, utilizando los mismos argumentos, el círculo osculador que será el círculo tangente a la curva en un punto y que informa de la curvatura de dicha función en ese punto. Demuestra que los centros de los círculos osculadores forman una recta, y esta noción será utilizada posteriormente en relación con los puntos críticos para identificar y discriminar los máximos de los mínimos.

Cuando comienza a tratar las cuestiones de máximos y mínimos dice :

Consistent à trouver pour une fonction donnée d'une variable, la valeur de cette variable qui rend la valeur de la fonction la plus grande ou la plus petite. Comme les courbes ne sont que la représentation ou le tableau de toutes les valeurs de la fonction de l'abscisa, représentée par l'ordonnée, il est visible que la question de trouver la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction donnée d'une variable, revient à déterminer la plus grande ou la plus petite ordonnée de la courbe dont cette variables serait l'abscisa, et la fonction donnée serait l'ordonnée.¹⁴³ (pp. 150-151).

Se asocia el cálculo de máximos y mínimos de una función con los correspondientes puntos de su representación gráfica en forma de curva, y se especifica que dicho valor máximo (mínimo) corresponderá a la ordenada, es decir, se da una definición en la noción de punto máximo (mínimo) está relacionada con la gráfica de la función (**d**). Se puede observar que se sigue identificando, al igual que hemos visto en otros autores como l'Hôpital, la función con el valor que toma en el punto, es decir, con la ordenada, pero es la

¹⁴³ Consiste en encontrar para una función dada de una variable, el valor de esta variable que da el valor de la función más grande o más pequeño. Como las curvas no son más que la representación o la tabla de todos los valores de la función de la abscisa, representada por la ordenada, es claro que la cuestión de encontrar el valor más grande o el más pequeño de una función dada de una variable, lleva a determinar la ordenada más grande o más pequeña de la curva donde esta variable sería la abscisa, y la función dada sería la ordenada.

primera vez que se utilizan los términos de abscisa y ordenada en relación con los puntos de una curva (antes hemos visto que se usaban los términos *coupées* y *apliquées*).

A partir de la representación gráfica de una función, es decir, a partir de la curva, indica cuál es la interpretación de los máximos y mínimos en relación con ella:

Or l'inspection seule de la courbe suffit pour faire voir que ces ordonnées ne peuvent être que celles qui répondent aux points dont les tangentes seront parallèles à l'axe des abscisses. Si la courbe est convexe à l'axe, l'ordonnée sera alors évidemment un *minimum* ; et si la courbe est concave l'ordonnée est un *maximum*¹⁴⁴. (p. 151)

Se identifica por lo tanto el cálculo de máximos y mínimos con los puntos en los que la recta tangente es paralela al eje de abscisas **(d)**. Pero, para calcularlos, se recurre al uso del círculo osculador en dichos puntos críticos, lo cuál resulta novedoso ya que es el único autor, de los que hemos estudiado que establece o parte de este tipo de relación **(d)**. Como dichos puntos tienen tangente horizontal, entonces en ellos se cumple que $y'=0$, y el lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores a dichos puntos estará determinado por una recta cuyos parámetros son $a=x$ y $b=y+\frac{1}{y''}$. Utiliza esta expresión

para establecer el criterio que permita distinguir los máximos de los mínimos, ya que, si y'' es una cantidad positiva el centro estará “más allá” de la curva, que será, por lo tanto, convexa hacia el eje; y si y'' es una cantidad negativa, el mismo centro estará “sin llegar” a la curva, es decir, del lado del eje y por consecuencia la curva será entonces cóncava. Por lo tanto:

Donc la fonction y sera un *maximum*, ou un *minimum*, lorsque sa fonction prime y' sera nulle ; et, en particulier, elle sera un *minimum*, lorsque la fonction seconde y'' sera en même temps une quantité positive ; et un *maximum*, lorsque y'' sera une quantité négative ; c'est en quoi consiste la méthode connue de *maximis* et *minimis*¹⁴⁵. (p. 151)

Hemos visto, por lo tanto, cómo a la vez que se indica cómo calcular los máximos y mínimos, se da el criterio para discriminar los diferentes casos de máximos y mínimos, relacionándolos con la convexidad de la curva, es la única vez que se da este criterio. A continuación se llega a los mismos criterios, pero sin recurrir a las curvas, es decir, a partir solamente de la expresión simbólica de la función, y utilizando únicamente argumentos algebraicos **(d)**.

Soit fx la fonction de x, dont on demande le *maximum* ou le *minimum*. Soit a la valeur de x ; qui répond au *maximum* ou au *minimum*, il faudra que la valeur de fa soit toujours

¹⁴⁴ Con la inspección de la curva es suficiente para hacer ver que estas ordenadas no pueden ser más que aquellas que corresponden a los puntos en los que las tangentes son paralelas al eje de abscisas. Si la curva es convexa al eje, la ordenada será entonces evidentemente un *mínimo*; y si la curva es cóncava, la ordenada será un *máximo*.

¹⁴⁵ Luego la función y será un máximo o un mínimo, siempre que la derivada primera y' se anule; y en particular, será un mínimo, siempre que la derivada segunda y'' sea al mismo tiempo una cantidad positiva; y un máximo, siempre que y'' sea una cantidad negativa; esto es en lo que consiste el método conocido como de máximos y mínimos.

plus grande ou toujours moindre que la valeur de $f(a+i)$, quelle que soit la quantité i , positive ou negative, et quelque petit qu'elle puisse être... la condition du *maximum* sera $f(x+i) < f(x)$, ou $f(x+i)-f(x) < 0$, et celle du *minimum* sera $f(x+i) > f(x)$, ou $f(x+i)-f(x) > 0$, quelque petit que soit i , positif ou négatif.¹⁴⁶ (pp. 151-152).

En este caso, como se ha dicho, sólo se utilizan argumentos algebraicos, sin ninguna referencia a la curva que representa la función y a la posición de los puntos en dicha curva. Pasamos pues de un argumento **gráfico**, basado en el uso de las rectas tangentes y en la determinación de la posición de éstas desde un punto de vista global, según el cual la tangente ha de ser paralela al eje de abscisas, a otro de tipo local, en el que se relacionan los valores de las ordenadas en los puntos que tienen abscisas muy próximas, dado que i se toma tan pequeño como queramos, con lo que podemos considerar dichos métodos **analíticos**, recordemos que Lagrange pretendía desarrollar el Análisis basándose exclusivamente en la utilización de métodos algebraicos. Pasamos, por lo tanto, de la consideración del máximo o mínimo como el punto “más alto” o “más bajo” en sentido gráfico a su consideración como el valor “mayor” o “menor” de la función o de la ordenada en dicho punto. El criterio anteriormente descrito se completa con el siguiente:

Donc, en general, si y est une fonction quelconque de x , on aura d'abord, pour le *maximum* ou le *minimum*, la condition $y'=0$ laquelle donnera la valeur de x , ensuite $y'' < 0$ ou > 0 , ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé ci-dessus. Mais nous venons de trouver de plus que si $y''=0$, il faudra que l'on ait aussi en même temps $y'''=0$; ensuite $y'' < 0$ pour le *maximum* et $y'' > 0$ pour le *minimum*; et ainsi de suite. En general, si une fonction dérivée d'un ordre quelconque pair disparaît, il faudra que la fonction de l'ordre impair suivant disparaisse aussi, et que la suivante de l'ordre pair soit negative pour le *maximum*, et positive pour le *minimum*.¹⁴⁷ (p. 154).

Se establece en el párrafo anterior el criterio más general para el cálculo de máximos y mínimos, que según veremos en capítulos posteriores, prácticamente no se utiliza en la educación secundaria, es decir, podemos considerar que se han eliminado los casos conflictivos para los que se necesitaría este tipo de criterio

Aunque se realiza un estudio detallado respecto de las funciones determinadas por ecuaciones en sentido explícito, también se aplican los resultados obtenidos a las funciones que vienen definidas de forma implícita, es decir, mediante ecuaciones de la forma $f(x,y)=0$, de la siguiente forma:

¹⁴⁶ Sea $f(x)$ la función de x , de la que queremos averiguar el máximo o el mínimo. Sea a el valor de x ; que corresponde al máximo ó al mínimo, tendremos que el valor de $f(a)$ será siempre más grande o siempre más pequeño que el valor de $f(a+i)$, cualquiera que sea la cantidad i , positiva o negativa, y por pequeña que pueda ser... la condición de máximo será $f(x+i) < f(x)$ o $f(x+i)-f(x) < 0$, y la de mínimo será $f(x+i) > f(x)$ o $f(x+i)-f(x) > 0$ por pequeño que sea i , positivo o negativo.

¹⁴⁷ Luego, en general, si y es una función cualquiera de x , tendremos en primer lugar, para el máximo o el mínimo, la condición $y'=0$, la cual dará el valor de x , luego $y'' < 0$ o > 0 , de acuerdo con lo que hemos demostrado antes. Pero si nosotros encontramos que $y''=0$, tendremos al mismo tiempo que $y'''=0$, luego $y'' < 0$ para el máximo, y $y'' > 0$ para el mínimo; y así sucesivamente. En general, si una función derivada de un orden par cualquiera es nula, la función derivada de orden impar siguiente también es nula, y la siguiente de orden par es negativa para el *máximo*, y positiva para el *mínimo*.

Si la fonction y n'est donnée que par une équation $F(x,y)=0$, il n'y aura qu'à prendre l'équation premier $F'(x)+y'F'(y)=0$, et faire $y'=0$, ce qui la réduira à celle-ci $F''(x)=0$, laquelle combinée avec $F(x,y)=0$, servira à déterminer les valeurs de x et y répondant au *maximum* ou au *minimum*. Ensuite on prendra l'équation seconde, et faisant de même $y'=0$, on aura la valeur de y'' , dans laquelle on substituera les valeurs trouvées de x et y , et on pourra juger, par cette valeur, du *maximum* ou du *minimum*; et ainsi de suite¹⁴⁸. (p. 154).

Este tipo de expresiones de funciones, que era muy habitual en la época de Lagrange, requieren dicha ampliación, en relación con la condición de máximo o mínimos. La forma en que se expone este criterio de cálculo de puntos críticos, puede servir a modo de algoritmo, ya que se distinguen las diferentes etapas o pasos que se deben seguir para obtener, no sólo los valores correspondientes a dichos puntos, sino también el método para averiguar el tipo de punto que ha sido encontrado. El hecho de que Lagrange quisiera hacer un libro en el que predominaran los métodos algebraicos ha condicionado la exposición del método de cálculo de los puntos críticos.

Resulta sorprendente que estando este libro pensado y utilizado como libro de texto en la Escuela Politécnica de París, no se incluyan en él aplicaciones o ejercicios en relación con los métodos expuestos de forma teórica, tanto más cuando que la parte en la que se incluyen los puntos críticos resulta de aplicación de la teoría desarrollada anteriormente, tanto en Geometría como en Mecánica. Así se expresa claramente en el último párrafo de la parte dedicada a dichos puntos.

Nous ne nous arrêtons pas à donner des exemples des règles précédentes pour la détermination des *maxima* et *minima*; comme elles s'accordent en tout avec celles que l'on connaît d'après le calcul différentiel, on pourra en faire les mêmes applications¹⁴⁹. (p. 155)

Por ello, y como hemos dicho anteriormente, no podemos incluir ejemplos o situaciones particulares que nos indiquen qué tipo de aplicaciones consideraba Lagrange en relación con los criterios de determinación de máximos y mínimos por él establecidos.

3.6.4.2.- Expresiones simbólicas.

En cuanto a las expresiones simbólicas que se utilizan para las funciones, son todas generales, usándose indistintamente fx (sin encerrar la variable entre paréntesis), o bien, y . Asimismo se utilizan, también indistintamente, letras mayúsculas o minúsculas (f o F) y, cuando es necesario, se recurre a letras griegas como φ . Para representar las variables, lo más habitual, y las que se usan por defecto, son las letras x e y , como hacemos actualmente,

¹⁴⁸ Si la función y está dada por la ecuación $F(x,y)=0$, tendremos la ecuación en derivadas primeras $F'(x)+y'F'(y)=0$, y haciendo $y'=0$, se reduce a $F'(x)=0$, que combinada con $F(x,y)=0$ servirá para determinar los valores de x y de y que responden al *máximo* o al *mínimo*. Luego calculamos la ecuación en derivadas segundas, y haciendo igualmente $y'=0$, tendremos el valor de y'' , en la cual sustituimos los valores encontrados de x e y , y podremos juzgar, para este valor, el *máximo* o el *mínimo*; y así sucesivamente.

¹⁴⁹ No nos detenemos en dar ejemplos de las reglas precedentes para la determinación de los máximos y de los mínimos; como se recuerda en todos los que han conocido después del cálculo diferencial, podríamos hacer las mismas aplicaciones.

pero para evitar confusiones, cuando se utilizan diferentes funciones en una misma demostración o exposición, se utilizan otras como r y s , o como p y q , enfatizando que son funciones distintas, y que corresponden, por lo tanto, a situaciones que pueden no ser comparables. Para representar abscisas particulares se utiliza la letra a , pero como normalmente lo que se pretende es generalizar, se sustituye dicha a por la letra x , con lo que ésta última se considera, según las ocasiones, como variable independiente o como valor concreto. Las primeras letras del abecedario $a, b, c, \dots$, suelen representar parámetros de rectas, círculos, ... Como novedades del libro, hay que destacar como se ha indicado en la introducción, la incorporación de los símbolos f' e y' para representar la derivada primera de una función de la forma $y=fx$; la utilización de f'' e y'' para la derivada segunda, etc, símbolos que se siguen utilizando actualmente.

La manera más usual de representar simbólicamente las funciones en este libro, es mediante el desarrollo en serie de potencias, que para una función de la forma $y=fx$, se expresa como sigue en el punto correspondiente a $x+i$.

- hasta la derivada segunda:

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''(x+j), \text{ siendo } j \text{ una cantidad entre } 0 \text{ e } i$$

- hasta la derivada tercera :

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2 \cdot 3} f'''(x+j), \text{ siendo } j \text{ una cantidad entre } 0 \text{ e } i$$

- hasta la cuarta

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2 \cdot 3} f'''x + \frac{i^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{iv}(x+j), \text{ siendo } j \text{ una cantidad}$$

entre 0 e i , y así sucesivamente.

En estas representaciones, la letra x representa un valor concreto, en el sentido de que es la abscisa del máximo o el mínimo de la función, y no como se sobreentiende habitualmente, es decir como variable independiente.

La utilización de las series de potencias para representar las funciones, da a entender que se están considerando las funciones como relacionadas con la predicción del movimiento a partir de un punto concreto (**e**), en este caso, como hemos dicho, ese punto es x , de forma que, sabiendo el comportamiento de la función en él, se puede deducir el comportamiento en un punto muy cercano a él, $x+i$. Básicamente esto sugiere la existencia de un movimiento o del fluir de una partícula (haciendo referencia al método de fluxiones de Newton) de forma que, a partir de su posición y movimiento actual, podemos deducir una posición en el futuro. Se da también un significado al término “derivada”, en el sentido de que a partir de una función inicial o “primitiva” (término del que actualmente también se ha perdido el significado y resulta un tanto artificial) fx , se obtienen otras que

aportan otro tipo de información acerca del movimiento en cuestión, $f'x$, $f''x$, $f'''x$,... y que son las funciones derivadas. En dichos desarrollos de potencias es conveniente destacar “el objetivo de la incorporación del residuo en la serie pues, al colocarlo en el desarrollo, puede limitar el número de términos de la serie según se requiera y, simultáneamente, tener la garantía de que para valores pequeños de y , cualquier sumando es más grande que la suma de todos los términos que le siguen. Sin lugar a dudas, esto hace de la serie un importante instrumento de uso en una gran diversidad de problemas que, muy particularmente, las ciencias físicas planteaban. Eventualmente, por ejemplo, en un problema de cinemática en el que se requiere conocer la posición de un cuerpo en un tiempo dado, sólo se necesita la función posición en el instante inicial y la velocidad y aceleración, por lo que bastará detenerse en la segunda derivada”¹⁵⁰. Utilizando estos desarrollos y métodos algebraicos, construye los argumentos necesarios para establecer y demostrar los criterios correspondientes a los puntos críticos. Dichos métodos enmascaran la realización de estudios locales que se están llevando a cabo, de hecho son repetitivas las expresiones del tipo “tan pequeño como se quiera”.

Otro elemento a destacar es el de la especificación del caso particular en que la función viene determinada por una expresión implícita, lo cual era habitual respecto del tipo de funciones que se manejaban en la época de Lagrange. En cambio ahora, raramente en la educación secundaria se utilizan dichas representaciones, al igual que pasa con las correspondientes a la utilización de las coordenadas polares o a las ecuaciones en coordenadas paramétricas.

3.6.5.- Conclusiones.

3.6.5.1.- Análisis socio-cultural.

- CIA1: La época en la que fue escrito el libro corresponde a la época de las revoluciones, en la que la preocupación por la formación en las escuelas técnicas superiores urgía la aparición de libros de texto adecuados, uno de los cuáles fue éste que estamos analizando.
- CIA2: Aunque Lagrange se mantuvo aislado durante sus años de formación de los centros en los que se estaba gestando la matemática del momento, a partir de sus primeros escritos, se puso en contacto con los grandes matemáticos del momento como Euler y D'Alembert, lo que le permitió conocer dichos avances y llegar a ser uno de los más grandes matemáticos que trabajó en Francia en aquella época.
- CIA5: Lagrange se dedicó a casi todas las ramas de las matemáticas, siendo importantes sus contribuciones a la Mecánica, pero destacando igualmente en teoría de números, resolución de ecuaciones algebraicas y cálculo de variaciones.

¹⁵⁰ Cantoral, R. (1995) Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis*, vol. XI, 1, 55-101 (p. 84)

- CEM1: El libro está dividido en dos partes que corresponden, respectivamente, a la teoría y a la aplicación en Geometría y Mecánica.
- d: Aunque en el libro no hemos encontrado aplicaciones en relación con los puntos críticos, somos conscientes de la importancia que concedía Lagrange a las aplicaciones, tanto geométricas como mecánicas, en las que destacaron sus contribuciones en relación con la astronomía.

3.6.5.2.- *Análisis epistemológico.*

- CIA2: La formación que tuvo Lagrange en Turín le hizo ser prácticamente autodidácta, le permitió obtener una visión desde la distancia del Análisis Matemático sin influencias de las dos escuelas principales que había en aquel momento: la francesa y la inglesa, para desarrollar sus propios métodos de concebirlo. De ahí su contribución hacia la algebraización de esta rama de las matemáticas.
- CIA4: Entre las innovaciones introducidas en la obra, hemos de destacar la incorporación de la expresión para el resto de la fórmula de Taylor, que conocemos como expresión de Lagrange del resto, en cuanto a la terminología la introducción de los términos función primitiva y función derivada, y en cuanto a la notación, la utilización de f' para representar la derivada de una función. Es interesante destacar la importancia que concedió al desarrollo en serie de potencias de una función para el desarrollo del Análisis sin necesidad de recurrir a las fluxiones, a las cantidades evanescentes o las diferenciales como habían hecho el resto de los matemáticos.
- CEM3: A partir de la noción de función, realiza su desarrollo en serie, analiza la formación de los términos de dicha serie y establece la noción de función derivada. Realiza un estudio totalmente analítico, a partir del desarrollo en serie de potencias de todo tipo de funciones, desde las algebraicas hasta las trascendentes, y lo aplica al estudio de las derivadas de diferentes órdenes, el cálculo de la derivada de una función compuesta y el estudio de las ecuaciones diferenciales. Resaltan las aplicaciones geométricas y las mecánicas relativas al estudio del movimiento y la fuerza.
- d: Aunque parte de las definiciones geométricas, tanto de tangente como de máximos y mínimos, el estudio de estas nociones y los criterios para calcular ambas cosas se establecen desde un punto de vista totalmente analítico, a partir del desarrollo en serie de potencias de las funciones correspondientes. Da la impresión de que retoma las definiciones inicialmente geométricas establecidas en la antigüedad para adaptarlas al momento en el que fue escrito el libro, utilizando los métodos algebraicos que estaban bastante afianzados en aquella época. Así, los razonamientos son fundamentalmente de tipo algebraico, aunque se hacen algunas comparaciones en las que intervienen representaciones gráficas cartesianas de las funciones, la curvas.

- e: Las expresiones simbólicas utilizadas, hacen alusión a un contexto dinámico en el que las variables son consideradas como representaciones de un movimiento en los que a partir de una situación actual, se predice la posición futura. Tal es la función que cumplen los desarrollos en series de potencias. Esto determina que el Cálculo Diferencial se establezca a partir de la noción de función derivada y no en la noción de diferencial, como hemos visto en los otros libros escritos en Francia.

3.6.5.3.- *Análisis didáctico.*

- CIA3: Dadas las dificultades y problemas surgidos en relación con las concepciones que tenían los matemáticos de los conceptos del Análisis y para intentar solventar dichas dificultades y errores cometidos, trató Lagrange de escribir un libro en el que los razonamientos fueran fundamentalmente algebraicos y no hubiera por lo tanto, riesgo de confusión o malinterpretación.
- CEM2: El enfoque dado a este libro, está centrado hacia la estructura del material, es decir, a fundamentar el Cálculo Diferencial bajo la noción de derivada.
- CEM4: Aunque la impresión es la característica de la época, no se incluyen gráficas en láminas desplegables como era usual. No hay, por tanto, ninguna representación gráfica que ayude a la visualización de los conceptos. La importancia está centrada en la expresión simbólica de la función.
- d: Los puntos críticos son considerados desde un punto de vista puramente algebraico, para lo que se establece el criterio algorítmico que permite su cálculo. Resalta la relación que se establece entre estos puntos y los círculos osculadores.

3.7.- *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Silvestre François Lacroix (1797).

3.7.1.- Ficha de referencia de la obra

Autor: Silvestre François Lacroix.

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: 1765-1843.

Título: *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral.*

Año, editorial y lugar de la primera edición: 1797-1800. Gauthier-Villars, París

Año, editorial y lugar de la edición consultada: 1867. Gauthier-Villars, París (séptima edición)

Localización del manual utilizado: Biblioteca General de la Universidad de Salamanca. 61605.

3.7.2.-Contextualización e intencionalidad del autor.

Aunque la mayoría de los libros de historia de las matemáticas se suelen referir a Lacroix como un matemático de rango menor con escasa influencia (**CIA2**), sin embargo en su época se consideró su impacto en la ciencia, al presentar los contenidos en sus libros de texto de forma ordenada, secuencial, clara y concisa, desde los elementos hasta los conceptos más complicados, de forma que contribuyó a difundir los contenidos matemáticos entre los alumnos y así ayudar al progreso, es decir, se vio una clara relación entre la claridad en la exposición de los contenidos y el progreso en la investigación.

“Presenter avec clarté des théories difficiles, les lier avec d’autres theories connues, dépouiller quelques unes de la partie systématique ou erronée, dont elles ont pu être obscurcies à leur naissance, repandre sus le tout un égal degré de lumière et de précision, en un mot, faire un ouvrage qui soit à la fois élémentaire et à la hauteur de la science, tel est le but que s’est proposé le Cn Lacroix, et qu’il n’a remplir sans s’engager dans de profondes recherches et marcher souvent de front avec les inventeurs »¹⁵¹ En Sesión del 11 nivôse an V (31 de diciembre de 1796) Proces-verbaux des Seances de l’Académie

Debemos pues considerar a Lacroix como un escritor de libros de texto de matemáticas, sus libros se utilizaron durante aproximadamente cincuenta años, desde 1795 hasta 1845¹⁵². La mayoría fueron publicados en sucesivas ediciones, y utilizados no sólo en los centros educativos franceses, sino prácticamente en todos los países europeos, así en España se utilizaron sus libros fundamentalmente en las escuelas navales y militares, y en algunos centros universitarios. Escribió libros para casi todas las ramas de las matemáticas, para casi todos los niveles educativos desde la secundaria hasta las escuelas técnicas. En su tiempo existieron otros dos autores de libros de texto que compitieron con él: A.A. Reynaud (1774-1844) que reeditó y trasformó los libros de Bézout y P.L.M. Bourdon (1779-1854)¹⁵³. Podemos considerar por lo tanto a Lacroix como un autor cuya obra contribuyó decisivamente a la construcción de la matemática escolar, no sólo en Francia, sino también en otros países europeos (**CIA1**).

Lacroix fue un profesor de matemáticas durante los últimos años del Antiguo Régimen principalmente en las escuelas militares. Después de la Revolución fue uno de los que trabajó más activamente para el establecimiento de un sistema general de formación,

¹⁵¹ Presentar con claridad las teorías difíciles, conectarlas con otras teorías, dismantelar algunas de las partes sistemáticas o erróneas que pueden obscurecerlos en el momento de su nacimiento, extender un mismo grado de luminosidad y de precisión sobre el total; o en pocas palabras, producir un libro que sea al mismo tiempo elemental y mantenga la altura de la ciencia, es el objetivo que se ha propuesto el ciudadano Lacroix y que no podría haber conseguido sin investigaciones profundas y progresando al mismo nivel que sus inventores.

¹⁵² Aunque hasta 1830 el sistema restrictivo que había en Francia respecto de la admisión y aprobación de libros de texto trajo consigo una baja producción de dicho tipo de libros, pero a partir de 1830 la producción aumentó marcadamente y aunque principalmente para los libros de lenguaje, también para los de matemáticas.

¹⁵³ En la siguiente generación de libros de texto franceses, los autores se restringieron al desarrollo de dos o tres ramas de las matemáticas como mucho, principalmente a causa de la especialización en las Universidades, de forma que los libros de Lacroix, Reynaud y Bourdon pueden considerarse escritores continuadores de los modelos de enciclopedias iniciadas en el siglo XVIII

particularmente sus esfuerzos se centraron en la incorporación de las matemáticas como parte imprescindible de la formación general.

La elaboración de buenos libros de texto fue considerada de principal importancia para la reforma del sistema educativo a partir de la Revolución Francesa. La utilización de un solo libro de texto para cada disciplina escolar, exigía la aplicación de un “buen método” que debía estar incorporado en dicho manual y que conseguiría la uniformización de los métodos y contenidos, asegurando de esta forma el control y la uniformización de la enseñanza. Todos los gobiernos franceses, a pesar de sus orientaciones políticas opuestas, continuaron con la política de elegir de forma centralizada los libros de texto que se iban a utilizar. El primer intento, en 1794, de producir el mejor libro de texto por disciplina (sólo se concedieron cinco meses para escribir dichos libros porque se debía considerar como una tarea fácil de conseguir y se barajaban algunos nombres de matemáticos como ganadores) y por medio de un concurso público falló estrepitosamente y se decidió crear una comisión permanente que eligiera entre los textos que se publicaban privadamente en el mercado. El concurso iniciado en 1794 tenía como punto de vista sólo los libros de primaria, y los profesores de las escuelas secundarias tenían libre elección de sus libros de texto. A pesar de ello la mayoría de las escuelas de enseñanza secundaria, eligieron los libros de texto de Bézout, y cuando Napoleón en 1803 suprimió estas escuelas republicanas por los *Lycées*, los profesores fueron forzados a usar sólo los libros aprobados por la comisión central. Lacroix fue miembro del jurado del concurso de 1794 con lo que no pudo participar en él. En 1795 publicó su primer libro de texto: *Traité de géométrie descriptive* basado en su experiencia como ayudante de las conferencias de Monge en la *Ecole Normale* en 1795. Desde que empezó a enseñar matemáticas en una *Ecole Centrale* de París, se dedicó a escribir más libros de texto, primero para su propio uso y luego para un público más amplio. En 1797 publicó *Traité élémentaire d'arithmétique* y el primer volumen de su importante obra *Traité de calcul différentiel et integral*. Debido a la urgente necesidad de dotar de libros de texto a las escuelas, Lacroix publicó en los cuatro años siguientes la mayor parte de su obra, para todas las ramas de las matemáticas, y para todos los niveles escolares. De hecho Lacroix enseñó matemáticas en casi todas las más importantes instituciones parisienses, en algunos casos en varias al mismo tiempo: *Ecole Normale*, *Ecole Centrale*, el *Lycée*, *Ecole Polytechnique*, *Faculté des Sciences*, *Collège de France*. Sus esfuerzos fueron coronados por un éxito singular: la comisión, que en 1803 tenía que elegir los libros de texto para los *Lycées*, adoptaron exclusivamente los libros de Lacroix para las matemáticas e incluso en los años posteriores, sus libros figuraron siempre en un lugar preeminente.

El principal objetivo de Lacroix, fue el desarrollo de un cuerpo coherente para las matemáticas escolares, desde secundaria hasta la educación superior (**CIA3**). Lacroix expresó este deseo, en el título que utilizó para definir el carácter general de su obra *Cours complet de mathématiques*, en él se incluyen obras de aritmética, álgebra, Geometría, Trigonometría, Geometría descriptiva, Cálculo diferencial e integral, cálculo de probabilidades. El intento de Lacroix se puede considerar de gran importancia, ya que tuvo lugar en un momento en el que por primera vez fue establecido un sistema educativo general y público, que concedió a las matemáticas una posición privilegiada sin precedentes hasta ese momento. La estructura de la presentación del conocimiento matemático no

estaba preparada y adaptada para las demandas de esta forma de enseñanza. Fue necesaria una readaptación y reestructuración, que constituyó el objetivo de Lacroix fundado en intereses meramente educativos. La idea subyacente que se puede integrar bajo el nombre de *elementarización* y fue ya definida en la *Encyclopédie* por D'Alembert, que consideró que el *elemento* debe ser el primer enlace en la cadena lógico-deductiva:

All would be reduced to this first proposition which one could regard as the *element* of the respective science since this science would be contained entirely in it. (Schubring, 1987)

Esta concepción no entrañaba problemas didácticos por si misma, pero razones solamente de tipo práctico emergieron en contra de la reducción lógica a los elementos básicos.

Followed strictly, this rule would reduce textbooks to almos nothing, which would render their use and application too difficult¹⁵⁴. (Citado en Schubring, 1987)

En el concurso de 1794, se presentó un libro de A.C. Clairaut sobre álgebra y geometría en el que se seguían las recomendaciones establecidas por Condillac:

The best method to teach others is to lead them along the same way which one had to follow in order to teach oneself¹⁵⁵. (Citado en Schubring, 1987)

Lacroix aceptaba este método como necesario para animar a aquellos que empezaban a estudiar álgebra, pero lo rechazaba por pedante y demasiado sobrecargado de detalles si se utilizaba más allá de los elementos.

Je ne tardans pas a me convaincre par moi-même qu'il étoit nécessaire de resserrer beaucoup la marche d'invention, et que lorsque l'élève a passé des premières difficultés qu'il a aperçu ñe but de la science, que des application l'ont convaincu d l'utilité de son travail, il ne faut plus, pour l'engager à continuer, que lui présenter les matières dans , « ordre où elles naissent les unes des autres.

Je crus donc devour me m'astreindre à la marche d'invention que pour en faire l'introduction des Elémens ». (Lacroix, 1880)¹⁵⁶.

Lacroix echaba en falta en el libro de Clairaut el rigor en sus demostraciones y el reducido número de aspectos tratados. Era necesaria una forma completamente diferente de

¹⁵⁴ Todo se debe reducir a esta primera proposición que se debe considerar como el elemento de la ciencia respectiva ya que esa ciencia lo debe incluir por entero. Utilizada de forma estricta esta regla puede reducir los libros de texto a casi nada, lo que puede producir su uso y aplicación demasiado difícil.

¹⁵⁵ El mejor método de enseñar a otros, es conducirles a lo largo del mismo camino que uno tuvo que seguir para enseñárselo a uno mismo.

¹⁵⁶ Yo no he tardado en convencerme que es necesario restringir el camino del descubrimiento considerablemente y que entonces, cuando los alumnos han superado las primeras dificultades, cuando han comprendido el objetivo de la ciencia, cuando las aplicaciones les han convencido de las utilidades de su trabajo, uno puede animar a los alumnos a continuar, presentando la materia en el orden en el que emerge de forma lógica de otras. Yo debería seguir esta forma de descubrimiento sólo después de introducir los elementos.

escribir libros de texto, y Lacroix mismo consideraba dicha tarea como una de las más complicadas

3.7.3- Caracterización de la estructura de la obra.

Desde que Lacroix comenzó a trabajar en su obra *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, intentó no sólo reflejar los resultados originales de los distintos investigadores que estaban desperdigados en diversas publicaciones de la multitud de las academias europeas, sino también estructurarlos y elementalizarlos para incorporar los conceptos del cálculo diferencial e integral como un campo conceptual y presentar dicho cálculo como una secuencia de conocimientos ordenados y bien definidos que comenzara a partir de los elementos básicos **(CEM1)**, así lo expresa en una carta a Legendre:

« Les livres élémentaires les plus complets, le Calcul Integral d'Euler, celui de M. Cousin ont besoin d'addition et peut être même pour mettre plus d'ensemble dans les parties, faudrait il un changement dans la manière de les présenter »¹⁵⁷. Carta de Lacroix a Legendre, 9 de noviembre de 1789.

La obra está dividida en dos tomos: el primer volumen comprende los elementos de cálculo diferencial y de cálculo integral, y en el segundo se han reunido los apéndices relativos a la teoría de diferencias y de series, algunas notas de Lacroix y nuevas notas (exclusivas de esta edición) de MM Hermite y J-A Serret. El primer tomo tiene 460 páginas y se divide en dos partes, una dedicada al cálculo diferencial y la otra para el cálculo integral **(CEM2)**.

La primera parte, dedicada al cálculo diferencial, está dividida en secciones que van desarrollando diferentes conceptos de dicho cálculo. Se comienza con las nociones preliminares en las que se establece la definición de conceptos como función **(CEM3)**:

Pour exprimer qu'une quantité dépend d'un ou de plusieurs autres, soit par des opérations quelconques, soit même par des relations impossibles à assigner algébriquement, mais dont l'existence est déterminée par des conditions certaines, on dit que la première est *fonction* des autres¹⁵⁸. (p. 1)

En cuanto al concepto de diferencial de una función, lo distingue del coeficiente diferencial, en el sentido de que el diferencial de una función u que depende de la variable x , será du y su coeficiente diferencial será $\frac{du}{dx}$, es decir:

La limite du rapport des accroissements, ou le coefficient différentiel, s'obtiendra en divisant la différentielle de la fonction par celle de la variables ; et réciproquement, on

¹⁵⁷ Los libros elementales los más completos, el Cálculo Integral de Euler y el de M. Cousin, necesitan añadido y para aumentar la coherencia de sus partes debería cambiarse la forma de su presentación.

¹⁵⁸ Para expresar que una cantidad depende de otra o de otras, sea por operaciones cualesquiera, sea por relaciones imposibles de asignar algebraicamente, pero cuya existencia está determinada por condiciones reales, decimos que la primera es *función* de las otras.

obtiendra la différentielle, en multipliant la limite du rapport des accroissements, ou le coefficient différentiel, par la différentielle de la variable. (p. 5)¹⁵⁹

Continúa usando el lenguaje de los diferenciales, y establece qué se entiende por cálculo diferencial en los siguientes términos:

Le Calcul différentiel est la recherche de la limite du rapport des accroissements simultanés d'une fonction et de la variable dont elle dépend¹⁶⁰. (p. 5)

Establece el método de cálculo de la diferencial de una función con ejemplos para funciones sencillas como $u=ax$, $u=ax^2$, $u=ax^3$, $u = \frac{a}{x}$ y posteriormente da la regla para calcular la derivada de la función compuesta:

Le coefficient différentiel d'une fonction de fonction s'obtiendra en multipliant l'un par l'autre les coefficients différentiels de ces fonctions, rapportées chacune à sa variable immédiate¹⁶¹. (p. 10).

Y da algunas reglas para diferenciar las funciones algebraicas de una sola variable, es decir, establece las reglas sobre la suma, la diferencia, el producto, el cociente, las potencias y las raíces de funciones.

La segunda sección está dedicada a las diferenciales sucesivas para lo cual utiliza la notación adecuada respecto de las diferenciales, es decir, para una función u que depende de la variable x , se obtendrán diferenciando sucesivamente respecto de x :

$$p = \frac{du}{dx}, \quad q = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad r = \frac{d^3u}{dx^3}, \dots$$

Estas diferenciales son utilizadas posteriormente, para desarrollar una función en serie de Taylor, de forma que si tenemos una función $u=f(x)$ que depende de la variable x , y llamamos a $u'=f'(x)$, obtendremos el siguiente desarrollo:

$$u' = u + \frac{du}{dx} \frac{y}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Y aplica este desarrollo para deducir la fórmula de Stirling, establecida en el año 1717:

¹⁵⁹ El límite de la razón de los incrementos, o el coeficiente diferencial, se obtendrá dividiendo la diferencial de la función por la de la variable; y recíprocamente, obtendremos la diferencial, multiplicando el límite de la razón de los incrementos, o el coeficiente diferencial, por la diferencial de la variable.

¹⁶⁰ El cálculo diferencial es la búsqueda del límite de la razón de los incrementos simultáneos de una función y de la variable de la que depende.

¹⁶¹ El coeficiente diferencial de una función de función se obtendrá multiplicando uno por otro los coeficientes diferenciales de sus funciones, relacionadas cada una con su variable inmediata.

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \text{etc.}$$

La siguiente sección está dedicada a la diferenciación de las funciones trascendentes: las funciones exponenciales $y=a^x$ e $y=e^x$, la derivada del logaritmo, y la derivada logarítmica y la derivada de las funciones circulares: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, ... Finalmente aplica estos resultados a diferentes ejemplos de funciones compuestas a partir de las anteriores.

En cuanto a la diferenciación de funciones de dos o más variables, las considera como dos funciones de una variable, obteniendo para cada una de ellas, al dejar fija una de las variables y permitir que la otra que se incremente, y aplicando el teorema de Taylor de una variable a $f(x,y)$, que:

$$f(x+h, y) = f(x, y) + \frac{df}{dx}(x, y)h + \frac{h^2}{2 \cdot 1} \frac{d^2 f}{dx^2}(x, y) + \dots$$

y equivalentemente para la otra variable:

$$f(x, y+k) = f(x, y) + \frac{df}{dy}k + \frac{k^2}{2 \cdot 1} \frac{d^2 f}{dy^2} + \dots$$

Enseguida propone la manera de combinar la variación en x y en y simultáneamente: $f(x+h, y+k)$, y a partir de aquí comienza a distinguir lo que se entiende por diferencial total y por diferenciales parciales. Para las funciones que tiene sólo dos variables, la diferencial total se representa por:

$$df(x, y) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

mientras que las diferenciales parciales tendrán la forma:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \dots, \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$$

Generaliza estas consideraciones tanto para las diferenciales sucesivas de una función de dos variables, como para las funciones que tienen más de dos variables, desarrollando en serie de Taylor esas funciones.

La siguiente sección está dedicada a la diferenciación de ecuaciones cualesquiera de dos variables igualadas a cero, es decir, las reglas que se van a deducir, se pueden aplicar a las funciones que están definidas de forma implícita. Se pretende establecer no sólo la diferencial primera sino los sucesivos órdenes de diferenciales.

Una de las secciones está especialmente dedicada al estudio de la teoría de curvas, de forma que se establece al principio de dicha sección que:

Toute fonction d'une seule variable peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe dont cette variable est l'abscisse ; et la rapport de l'ordonnée de la courbe avec la sous tangente correspond au coefficient différentiel de la fonction¹⁶². (p. 68)

Es a partir de la utilización de las curvas como forma de representación gráfica de las funciones y en relación con ellas, cuando se establece lo que se entiende por *ley de continuidad*, que es la primera vez que lo encontramos en un libro de texto:

On doit entendre par la loi de continuité, celle qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après la quelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle¹⁶³. (p. 69)

Y se establece la relación gráfica entre la diferencial y los elementos geométricos que constituyen la curva, que habíamos visto anteriormente en el libro de Bails, y que permanecerá en los libros de texto actuales:

Le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dy}{dx}$, exprimant le rapport $\frac{PM}{PT}$, donne la tangente trigonométrique de l'angle MTP, que fait, avec l'axe des abscisses AB, la droite qui touche la courbe au point M, et caractérise la marche de la courbe aux environs du point M ; car si AB désigne le côté positif de l'axe des abscisses, l'angle MTP et sa tangente seront positifs, quand les ordonnées iront en croissant comme dans la fig. 1 et négatifs dans le cas contraire¹⁶⁴. (p. 72)

Utilizando esta relación gráfica-expresión simbólica, identifica cuándo una curva es creciente o decreciente y cuando es cóncava o convexa hacia el eje de abscisas, para posteriormente establecer las ecuaciones de las rectas tangente, normal, y de los segmentos subtangente y subnormal:

$$\text{Tangente: } y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$$

$$\text{Normal: } y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x)$$

¹⁶² Toda función de una sola variable puede ser representada por la ordenada de una curva para la cual la variable es la abscisa; y la razón de la ordenada de la curva con la subtangente corresponde al coeficiente diferencial de la función.

¹⁶³ Debemos entender por la ley de continuidad, aquella que se observa en la descripción de las líneas por el movimiento, y según la cual los puntos consecutivos de una misma línea se suceden sin ningún intervalo.

¹⁶⁴ El coeficiente diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx}$, expresa la razón $\frac{PM}{PT}$, da la tangente trigonométrica del

ángulo MTP, que forma, con el eje de abscisas AB, la recta que toca a la curva en el punto M, y caracteriza la marcha de la curva en un entorno del punto M; ya que si AB designa el lado positivo del eje de abscisas, el ángulo MTP y su tangente serán positivos, mientras que las ordenadas vayan en crecimiento como en la fig. 1 y negativos en el caso contrario.

$$\text{Subtangente: } x' - x = -\frac{y dx}{dy}$$

$$\text{Subnormal: } x' - x = \frac{y dy}{dx}$$

Donde x' e y' representan las coordenadas del punto en el que se están calculando dichas rectas y segmentos. Los últimos párrafos de esta sección, están dedicados a la identificación de las asíntotas a una hipérbola.

La siguiente sección está dedicada a las curvas osculatrices, haciendo particular énfasis en el caso de los círculos osculadores y definiendo lo que se entiende por curvas envolvente y evolutas. Pasa al estudio de los puntos singulares de la curva: máximos, mínimos, puntos de inflexión y puntos de retroceso (de rebotadura), los puntos múltiples y los puntos conjugados, de los que haremos un análisis más detallado en el resto del capítulo.

El teorema de l'Hôpital ocupa una sección completa en la que no sólo describe las situaciones en las que se aplica, sino que lo demuestra y ejemplifica su utilización en variados ejemplos, que desarrolla de forma detallada.

Hace un análisis de las curvas de tipo algebraico, de forma que las clasifica según el orden que poseen, y dentro de dicho orden, según algunas consideraciones específicas que las determinan, se subdividen en especies, de forma que podemos considerar este libro como continuación de lo que había iniciado Euler y que va a aparecer en los libros de texto a partir de entonces. Hace un estudio relativo al tipo de raíces que poseen las curvas: si son reales o imaginarias; de las ramas infinitas; de los puntos singulares. Realiza un estudio de las curvas trascendentes: logarítmica, la cicloide, algunas espirales (Arquímedes, hiperbólica, parabólica), para las que establece las ecuaciones generales de las rectas tangente y normal, calcula la subtangente y la subnormal, determina el radio de curvatura y los puntos singulares que poseen. Dedicar unos apartados particulares al estudio de curvas dadas en coordenadas polares, así como a las transformaciones de coordenadas rectangulares a polares, y viceversa.

Otra sección está dedicada al cambio de la variable independiente y cómo el cambio afecta al diferencial, describiendo asimismo la interpretación geométrica de un cambio de este tipo.

Las últimas secciones se refieren a funciones de más de una variable y, por lo tanto, se estudia: la diferenciación de ecuaciones que contienen más de una variable independiente, la aplicación del cálculo diferencial a la teoría de las superficies curvas, los puntos singulares de superficies curvas (máximos y mínimos de funciones de varias variables), la aplicación del Cálculo diferencial a las curvas de doble curvatura y a las superficies desarrollables.

El libro está escrito en francés. Cada una de las secciones está encabezada por un título escrito en negrita y centrado de forma que sirve para identificar claramente los distintos conceptos tratados. Cada sección está dividida en párrafos numerados a los que se

hace referencia en el resto del texto a través de los números que permiten, por lo tanto, identificarlos. No se establece ninguna distinción entre definiciones, teoremas, demostraciones, ejemplos y otros recursos habitualmente utilizados en los libros de texto, de forma que aparece como una serie de párrafos encadenados unos con otros sin ningún título que permita establecer cuándo se está desarrollando una explicación o cuando se está describiendo un teorema. Para algunos conceptos, la definición viene diferenciada en letra cursiva, recurso también utilizado para establecer algunos resultados o conclusiones (CEM4).

El libro contiene unas hojas desplegadas del tamaño de página y media con las gráficas numeradas al final del libro. La zona de las gráficas está enmarcada con una línea doble siendo la de fuera más gruesa. La parte más interior de dichas hojas está en blanco de forma que se pueden leer las páginas anteriores en las que se hace referencia a dichas gráficas, manteniendo la hoja en la que están dibujadas desplegada.

3.7.4.- Representaciones.

3.7.4.1.- Descripciones.

A) Definición de punto singular.

Lacroix llama puntos singulares a aquellos que se pueden identificar en una curva por alguna característica remarcable (**d**). Dichos puntos han sido llamados en otros textos, al igual que lo hemos hecho nosotros, *puntos críticos*, en el sentido de que en ellos se establece un cambio significativo en la curva: cambio de crecimiento a decrecimiento, cambio de convexidad, cambio de rama de la curva,... Así se definen y clasifican en este libro que estamos analizando dichos puntos:

On appelle *points singuliers* d'une courbe ceux dans lesquels elle offre quelque circonstance remarquable¹⁶⁵. (p. 96).

El enfoque que sigue Lacroix es el de identificar y clasificar (**d**) los puntos críticos, distinguiendo para ello tres posibilidades que estudia de forma independiente y detallada: cuando el coeficiente diferencial es nulo, cuando es infinito o cuando produce un cociente del tipo $\frac{0}{0}$.

El primer tipo de puntos que se describen, son los correspondientes a los máximos y mínimos relativos (aunque no se utilice este término explícitamente en el texto) que se relacionan tanto con el cambio de crecimiento de la curva y con los valores que toman las abscisas próximas a ellos:

La valeur qui a lieu dans le passage de l'accroissement au décroissement, étant plus grande que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement, s'appelle un *maximum* ; le *minimum* es celle qui répond au point où le décroissement se change en

¹⁶⁵ Llamamos puntos singulares de una curva a aquellos que ofrecen alguna circunstancia remarcable.

accroissement ; celle-ci est par conséquent plus petite que les valeurs qui la précèdent et qui la suivent immédiatement : je dis immédiatement, parce qu'il y a des fonctions pour lesquelles ces alternatives ont lieu plusieurs fois¹⁶⁶. (p. 96).

Se trata de la definición clásica de punto máximo (mínimo) como aquel en el que la ordenada es el valor mayor (menor) que toma la función en relación con los puntos próximos a él y, por lo tanto, vienen caracterizados por medio de una comparación aritmética (**d**). Se establece que no se trata de máximos o mínimos absolutos mediante la expresión: “il y a des fonctions pour lesquelles ces alternatives ont lieu plusieurs fois”, es decir, una misma función puede tener varios máximos y mínimos, que sólo dependen de la relación que haya con los puntos próximos a ellos.

B) Puntos máximos, mínimos y de inflexión.

La regla que permitirá calcular no sólo los máximos y mínimos, sino otro tipo de puntos que pueden poseer las curvas, como los puntos de inflexión y los de retroceso, es decir, todos los puntos críticos es la siguiente:

Ainsi, pour donner une règle qui fasse connoître, sans exception, tous les points où les ordonnées d'une courbe, de croissantes deviennent décroissantes, ou *vice versa*, il faut prescrire d'égaliser à zéro au à l'infini l'expression de $\frac{dy}{dx}$: il y aura maximum si la valeur de ce coefficient passe alors du positif au négatif, minimum dans le cas contraire. Il n'y aurait ni maximum ni minimum s'il n'y avait pas de changement de signe, ce qui arrivera toutes les fois que le facteur qui s'évanouira, soit au numérateur, soit au dénominateur, aura pour exposant un nombre pair ou une fraction de numérateur pair¹⁶⁷. (p. 99).

Hemos de destacar la utilización de lo que Lacroix llama *coeficiente diferencial*, que considera como cociente entre las diferenciales de la ordenada y de la abscisa. Todavía no se ha llegado a la consideración de este símbolo como un todo, sino que se utiliza de forma algebraica, operando con él como si de un cociente se tratara y se sigue construyendo el Análisis a partir del concepto de diferencial. Entre los puntos críticos considera, no sólo los casos de máximos y mínimos, sino también los de puntos de inflexión y los puntos de retroceso, y hace un estudio según que el orden de derivada que se anule sea par

¹⁶⁶ El valor que se está en el paso del crecimiento al decrecimiento, es más grande que todos los que le preceden y de todos los que le siguen inmediatamente, se llama *máximo*; el *mínimo* es aquel que responde a un punto donde el decrecimiento se cambia en crecimiento; aquél es por tanto más pequeño que los valores que le preceden y que le siguen inmediatamente; digo inmediatamente, porque hay funciones para las cuales estas alternativas tienen lugar varias veces.

¹⁶⁷ Así, para dar una regla que permita saber, sin excepción, todos los puntos donde las ordenadas de una curva, de crecientes cambian a decrecientes, o viceversa, vamos a prescribir igualar a cero o a infinito la expresión de $\frac{dy}{dx}$; hay un máximo si el valor de este coeficiente pasa de positivo a negativo, mínimo en el caso contrario. No habrá máximo ni mínimo si no hay cambio de signo, a lo que se llega cada vez que el factor que se desvanece, sea el numerador, sea el denominador, tenga por exponente un número par o una fracción de numerador par.

o impar y que la diferencial correspondiente sea nula o sea infinita; esto es similar a lo que hacía Euler en su libro, pero en este caso se plantea de una forma más didáctica, haciéndose el estudio a partir de ciertos ejemplos ya preparados **(d)**. Así para ejemplificar los contenidos, los aplica a una familia de curvas representadas por la ecuación de tipo algebraico:

$$y = b + c(x - a)^m$$

de esta forma va distinguiendo las diferentes posibilidades o casos que se pueden presentar. Así, en dicho ejemplo, diferenciando, obtiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = mc(x - a)^{m-1}$$

cuyo signo cambia según sea el de $x-a$ o se mantiene igual, dependiendo de la naturaleza par o impar del exponente m , de forma que estas posibilidades le conducen a considerar los siguientes casos:

- Si el exponente m es par, y c es positivo, se tiene un punto mínimo para $x=a$, y si c es negativo, se tiene un punto máximo para $x=a$.
- Si el exponente m es impar, no se tiene ni máximo ni mínimo, se tiene un punto de inflexión.
- Si m es una fracción ($m < 1$) de numerador par y de denominador impar, y c es positivo, el coeficiente diferencial se hace infinito para $x=a$, la función pasa de ser decreciente a ser creciente y aunque la concavidad se mantiene igual, se produce un cambio brusco en la curva. A este punto se la considera un punto de retroceso comprendido dentro de la especie de los mínimos. Análogamente si c fuese negativo, tendríamos un punto de retroceso de la especie de los máximos.
- Si m es una fracción ($m < 1$) de numerador impar y de denominador par, tendremos una función radical que toma valores imaginarios para $x < a$, y que es susceptible de tener el doble signo $\pm$, por lo tanto la curva tendrá dos ramas, una debajo de la otra para las mismas abscisas con diferente concavidad.
- Si m es una fracción ($m < 1$) donde el numerador y el denominador son impares, aquí las ordenadas son reales tanto antes como después de que x tome el valor a , pero la diferencial es igual a infinito y, como se produce un cambio de concavidad, se trataría de un punto de inflexión.

En el caso en que el exponente m sea una fracción mayor que 1, cambiando x por y se puede comprobar que los resultados son los mismos, pero respecto del otro eje de coordenadas. En este sentido establece la reflexión siguiente:

Il faut observer que les points de *minimum* et de *maximum* ... dépendent de la position de la tangente, par rapport aux axes des coordonnées, et qu'il n'en es pas de même des

inflexions et des *rebroussements*, qui sont inhérents à la courbe, et subsistent toujours, de quelque manière qu'on change la position de ces axes¹⁶⁸. (pp. 100-101)

C) Puntos de segunda especie.

Considera además otro tipo de puntos de retroceso que denomina de *segunda especie*, en los cuales se forman dos ramas de la curva que tienen la misma tangente en dicho punto, y de forma que ambas ramas permanecen en el mismo semiplano respecto de dicha recta tangente en un entorno del punto de retroceso. Pone el ejemplo siguiente de una situación correspondiente a este tipo de puntos:

$$(y - x^2)^2 = x^5, \text{ o bien despejando la } y, y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$$

que en el punto $x=0$ posee un punto de retroceso de segunda especie.

D) Puntos múltiples.

Otro tipo de puntos surgen a partir de situaciones del tipo:

Quelquefois les branches des courbes, au lieu de se réunir en se touchant, se coupent, et ont chacune leur tangente particulière¹⁶⁹. (p. 101)

para los que propone como ejemplo, la siguiente ecuación correspondiente a una familia de funciones:

$$y = b \pm (x - a)\sqrt{x - c} \quad (a > c)$$

en la que a partir del punto $x=a$, se tienen dos ramas de la curva, pero en dicho punto, a pesar de que sólo hay una ordenada, tiene dos tangentes distintas una correspondiente a la rama positiva y otra a la negativa, estos puntos los denomina **múltiples**:

Les points où plusieurs branches se réunissent et se rencontrent se nomment *points multiples*¹⁷⁰. (p. 102)

En el caso anterior se trata de *puntos dobles* porque en dicho punto se encuentran dos ramas de la curva. Además, cualquiera que sea el exponente m , siempre que sea par, en la expresión:

$$y = b + (x - a)\sqrt[m]{x - c}$$

¹⁶⁸ Se observa que los máximos y los mínimos ... dependen de la posición de la tangente, en relación con el eje de coordenadas, y que no pasa lo mismo con los puntos de inflexión y de retroceso, que son inherentes a la curva, y subsisten de igual manera a pesar del cambio de posición de los ejes.

¹⁶⁹ Algunas veces las ramas de las curvas, en lugar de reunirse en donde se tocan, se cortan, y tienen cada una su tangente particular.

¹⁷⁰ Los puntos donde varias ramas se reúnen y se reencuentran se llaman puntos múltiples.

el punto $x=a$ será un punto doble, ya que el radical es susceptible del doble signo $\pm$.

E) Puntos conjugados.

Considera, por último, otro tipo de puntos críticos que denomina *puntos conjugados* que se caracterizan de la siguiente forma:

Les courbes sont accompagnées quelquefois de points isolés qui ont le caractère des points multiples ; mais on les distingue, parce que les coefficients différentiels, y devenant imaginaires, soit dès le premier ordre, soit plus tard, montrent qu'il n'y a pas de points consécutifs¹⁷¹. (p. 103)

Para ello utiliza como ejemplo la función:

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0, \text{ o bien, } y = \sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}}$$

cuyo coeficiente diferencial en el punto $x=0$ es el cociente $\frac{0}{0}$, pero eliminando el coeficiente en x , resulta una expresión imaginaria. La ordenada para $x=0$ es $y=0$, pero también se obtiene dicha ordenada para $x=b$, luego hay un punto que cumple la ecuación pero que está separado de la curva:

Les points de cette espèce se nomment *points conjugués* ; ils résultent de ce qu'une portion finie de la courbe proposée s'évanouit par la détermination particulière de quelque constante de son équation¹⁷². (p. 103)

Propone otro ejemplo correspondiente a la curva:

$$ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0, \text{ o bien, } y = \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x-c)}{a}}$$

y la función:

$$y = (x-a)^m (x-b)^{\frac{2n+1}{2}}$$

donde m y n designan dos números positivos. Suponiendo $a < b$, siempre que $x=a$, se obtienen $m-1$ coeficientes diferenciales nulos, y el de orden m es imaginario:

¹⁷¹ Las curvas están acompañadas algunas veces de puntos aislados que tiene el carácter de puntos múltiples; pero se distinguen porque los coeficientes diferenciales, se hacen imaginarios, sean los de primer orden, sea más tarde, indican que no son puntos consecutivos.

¹⁷² Los puntos de esta especie se llaman *puntos conjugados*; resultan de que una porción finita de la curva propuesta se anula por la determinación particular de alguna constante de su ecuación.

Les courbes ont aussi quelquefois des points singuliers qui ne sont pas visibles : ce sont ceux qui résultent d'un nombre pair d'inflexions qui se réunissent en une seule¹⁷³. (p. 104)

G) Cálculo de los puntos singulares para curvas dadas mediante su ecuación implícita.

A continuación estudia el caso en que las dos variables vengan “mezcladas” (ecuación implícita) en una ecuación de la forma $u=0$, en cuyo caso para calcular el coeficiente diferencial, habrá de realizarse de la siguiente forma:

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0, \text{ de donde, } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}$$

En el caso en que para un valor particular $x=a$ se obtengan varios valores de y , la función u , que tendrá la forma $U(y-b)^m$ que tiene como coeficiente diferencial

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{dy}(y-b)^m + mU(y-b)^{m-1}$$

valor que se hace nulo para $y=b$ y producirá un coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$ infinito si $\frac{du}{dx}$ no se anula, y dará $\frac{0}{0}$ si se anula. Pone como ejemplos las ecuaciones:

$$(y-b)^2 - (x-a) = 0, \text{ y } (y-b)^3 - (x-a)^2 = 0$$

de las que se obtienen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-b)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(x-a)}{3(y-b)^2}$$

Finalmente, establece la regla general para la determinación de los puntos singulares de la siguiente forma:

On obtiendra généralement l'indication de l'abscisse à laquelle répond un point sigulier, en cherchant dans quel cas les coefficients différentiels, à partir d'un ordre quelconque devinrent nuls, ou infinis, ou $\frac{0}{0}$. On assignera l'espèce du point, 1° en examinant combien il passe de branches de la courbe à ce point, et si elles s'étendent ou non en

¹⁷³ La curvas tienen también algunas veces puntos singulares que no son visibles: son aquellos que resultan de un número par de inflexiones que se reúnen en una sóla.

deçà et au delà ; 2° en determinant la position de leur tangente ; 3° les sens lequels elles tournent leur concavité¹⁷⁴. (p. 110).

Distingue tres posibilidades, por lo tanto, en relación con los puntos críticos, no sólo considera los que anulan el coeficiente diferencial sino también los que lo hacen infinito o los que producen una indeterminación. Estos tres tipos de singularidades completan el mapa de singularidades en relación con la diferencial de una función y definen los puntos de la curva en los que se produce algún cambio: crecimiento, convexidad, rama,..

H) Los puntos singulares y el desarrollo en serie de potencias.

Debido a que el tema de máximos y mínimos es considerado de especial importancia en el Cálculo Diferencial, desarrolla paralelamente un apartado en el que se trata dicho tema sin referencia explícita a la curva que se asocia a una función, pero utilizando la serie de Taylor. Desarrolla en serie una función u a la derecha (u') y a la izquierda (u_-) de un punto particular a , con lo que se obtienen las siguientes series ordenadas de menor a mayor exponente, y considerando que éste puede ser entero o fraccionario:

$$u' = u + Ph^\alpha + Qh^\beta + Rh^\gamma + \text{etc.}$$

$$u_- = u + P(-h)^\alpha + Q(-h)^\beta + R(-h)^\gamma + \text{etc.}$$

la diferencia con la función primitiva u será:

$$u_- - u = P(-h)^\alpha + Q(-h)^\beta + R(-h)^\gamma + \text{etc.}$$

$$u' - u = Ph^\alpha + Qh^\beta + Rh^\gamma + \text{etc.}$$

ambas deben ser negativas si u tiene un máximo, y positivas, en el caso contrario, para cualquier valor de h por pequeño que sea. Por lo tanto, los primeros términos $P(-h)^\alpha$ y Ph^α deben tener el mismo signo, con lo que el coeficiente α debe ser par, de forma que si P tiene signo $+$, se tiene un *mínimo* y si es $-$, se tiene un *máximo*.

Seguidamente distingue los casos en que el coeficiente es entero o fraccionario. En el primero de los casos tendremos el siguiente coeficiente:

$$P = \frac{1}{1.2... \alpha} \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}$$

¹⁷⁴ Obtendremos generalmente la indicación de la abscisa que responde a un punto singular, buscando los coeficientes diferenciales que, a partir de un orden cualquiera se hacen nulos, infinitos o $\frac{0}{0}$. Asignaremos la especie del punto, 1° examinado cuántas ramas de la curva pasan por el punto, y si ellas se extienden o no de este lado o del otro lado; 2° determinando la posición de su tangente; 3° los sentidos hacia los que tiene su concavidad.

para el que considera diferentes posibilidades según se anule o no el coeficiente diferencial y según α sea par o impar:

et puisque l'exposant α doit être un nombre pair, quand u est un *maximum* ou un *minimum*, il faut d'abord que la supposition de $x=a$ fasse évanouir le coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$, qui est d'ordre impair: a est donc une des racines de l'équation

$\frac{du}{dx} = 0$. Il faut en outre que cette même valeur ne rende pas nul $\frac{d^2u}{dx^2}$, ou que, si cela

arrive elle rende nul aussi $\frac{d^3u}{dx^3}$, mais non pas $\frac{d^4u}{dx^4}$, et en general, que le premier des coefficients différentiels qu'elle ne fait pas évanouir soit d'ordre pair; elle rendra alors u *maximum*, si ce dernier coefficient est négatif, et *minimum* dans le cas contraire¹⁷⁵. (p. 120).

A partir del desarrollo en serie de Taylor describe el criterio general para la determinación de máximos y mínimos, así como la manera de distinguirlos. Además considera los casos en que dicho desarrollo venga realizado por potencias fraccionarias, en cuyo caso se ofrece el siguiente criterio:

S'il est fractionnaire et >1 , la valeur $x=a$, qui donneau développement de u' la forme particulière qu'il prend alors, doit anéantir tous les coefficients différentiels des ordres

dont l'exposant est $<\alpha$: l'équation $\frac{du}{dx} = 0$ indiquera donc encore cette valeur $x=a$; mais

pour s'assurer si elle donne un *maximum* ou un *minimum*, il pourra être nécessaire de calculer à priori les différences $u, -u$ et $u' - u$, dans la supposition de h très-petite, afin de savoir si leurs premiers termes sont de même signe et quel il est¹⁷⁶. (p. 120).

Dicho criterio se completa en el caso en que el primer exponente sea menor que 1 de la siguiente forma, reduciéndola al caso anterior:

¹⁷⁵ Y como el exponente α debe ser un número par, cuando u es un máximo o un mínimo, tendremos que la suposición de $x=a$, hace nulo el coeficiente diferencial $\frac{du}{dx}$, que es de orden impar; a es entonces una de las

raíces de la ecuación $\frac{du}{dx} = 0$. Si este valor hace nulo $\frac{d^2u}{dx^2}$, también lo será $\frac{d^3u}{dx^3}$, pero no $\frac{d^4u}{dx^4}$, y en general, el primero de los coeficientes diferenciales que no es nulo es de orden par; tendremos en u un máximo si este último coeficiente es negativo, y mínimo en caso contrario.

¹⁷⁶ Si es fraccionario y >1 , el valor $x=a$ que da al desarrollo de u' la forma particular que vimos antes, debe aniquilar todos los coeficientes diferenciales de los órdenes cuyos exponentes son $<\alpha$: la ecuación $\frac{du}{dx} = 0$ indicará entonces este valor $x=a$; pero para asegurar de si da un máximo o un mínimo, será necesario calcular a priori las diferencias $u, -u$ y $u' - u$ bajo la suposición de h muy pequeño, a fin de saber si sus primeros términos son del mismo signo y cuál es.

Enfin, quand $\alpha < 1$, $\frac{du}{dx}$ devenant infini, c'est alors l'équation : $\frac{1}{\frac{du}{dx}} = 0$

qui indique la valeur $x=a$, dont la propriété se discute, comme il vient d'être dit pour le cas où $\alpha > 1$ ¹⁷⁷. (p. 120)

I) Aplicaciones.

Las aplicaciones de los conceptos teóricos son muy escasas, sólo hemos encontrado un problema y dos ejemplos que parten de sendas ecuaciones algebraicas. El problema ya lo hemos encontrado en los libros analizados con anterioridad:

Partager une quantité a en deux parties, de manière que le produit de la puissance m de la première par la puissance n de la seconde, soit le plus grand de tous les produits semblables qu'on pourrait former¹⁷⁸. (p. 121).

Es un problema de tipo aritmético que se plantea en una de sus formas más generales posibles **(d)** obteniéndose a partir de él una función algebraica de la forma $u=x^m(a-x)^n$. A partir de dicha ecuación, se calcula el coeficiente diferencial de primer orden, se iguala a cero y se obtienen tres abscisas, correspondientes a tres puntos singulares:

$$x = \frac{ma}{m+n}, x=0 \text{ y } x=a$$

La primera abscisa corresponde a un punto máximo y las otras dos a puntos mínimos si m y n son pares.

La restantes aplicaciones corresponden a funciones que vienen dadas por medio de su ecuación algebraica dada en su forma implícita:

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0 \text{ (p. 122)}$$

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0 \text{ (p. 124)}$$

La primera función sólo tiene un máximo, pero la segunda posee un máximo y un mínimo, así como puntos de inflexión, puntos múltiples y puntos conjugados, con lo que, a partir de dicha ecuación, se puede hacer un estudio bastante completo de las condiciones que deben cumplir cada uno de estos tipos de puntos.

¹⁷⁷ En fin, cuando $\alpha < 1$, $\frac{du}{dx}$ se hace infinito, tenemos entonces la ecuación $\frac{1}{\frac{du}{dx}} = 0$, que indica el valor de

$x=a$, para el que se discute la propiedad, como se ha dicho para el caso $\alpha > 1$.

¹⁷⁸ Dividir una cantidad a en dos partes, de manera que el producto de la potencia m -ésima de la primera por la potencia n -ésima de la segunda, sea el mayor de todos los productos similares que podemos formar,

3.7.4.2- Gráficas.

Las gráficas que se incluyen en el libro de Lacroix son del tipo **ideograma (g)** y mediante ellas se consideran todos los tipos posibles de situaciones en las que se pueden encontrar los puntos estacionarios. Se utilizan a modo de esquema que sirve para identificar cuándo se tiene uno de dichos puntos. Así por ejemplo, para representar los máximos y mínimos, se utiliza la representación gráfica de una parábola en la que sólo se señalan los puntos extremos, indicando mediante el segmento AP la abscisa, y mediante el segmento PM la ordenada. Dicho punto se resalta además incorporando la tangente a la curva en el punto que es paralela al eje de abscisas, tanto para el máximo como para el mínimo.

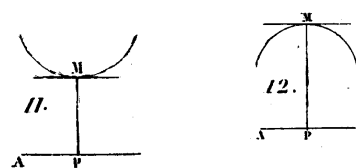


Fig. 3.40 Gráficas correspondientes a un máximo y un mínimo

Para comprobar el que la tangente sea horizontal en un punto, no implica que el punto ha de ser un extremo, se incluye la siguiente gráfica de un punto de inflexión que sirve de contraejemplo:

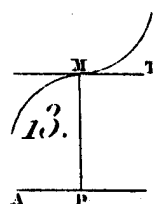


Fig. 3.41 Tangente en un punto de inflexión

Se consideran asimismo otro tipo de puntos mínimos y máximos, que corresponden a funciones que no son derivables en dichos puntos, y la tangente es perpendicular al eje de abscisas, son los llamados puntos de retroceso. Dichos puntos se consideran puntos extremos, porque el valor de la función en ellos es menor (mayor) que el valor que toma en los puntos de un entorno:

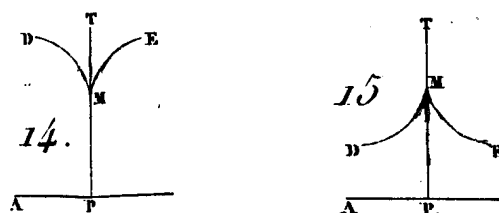


Fig. 3.42: Puntos de retroceso mínimo y máximo

Otros casos que también han sido considerados, corresponden a situaciones en las que la tangente es vertical y se obtienen de funciones potenciales en las que el exponente es una fracción menor que 1. El primero se puede considerar como un mínimo de la variable x entendida como función de y , el segundo es considerado como un punto de inflexión al cambiar en él la convexidad.

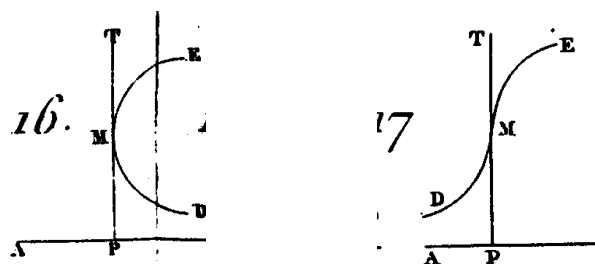


Fig. 3.43 Puntos singulares con tangente vertical

La representación gráfica de los puntos de retroceso de segunda especie, resalta que dividen a la curva en dos ramas con la misma tangente y sin variar la convexidad, de forma que las dos ramas permanecen del mismo lado respecto de la recta tangente:

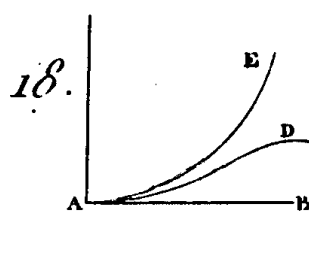


Fig. 3.44 Puntos de retroceso de segunda especie

En cuanto a los puntos múltiples, que son aquellos por los que pasan varias ramas de una misma curva, puede ocurrir que dichas ramas estén del mismo lado respecto de la tangente, o bien que pertenezcan a planos distintos respecto de dicha recta. Para mostrar este tipo de situaciones propone dos ideogramas con una sola tangente en el punto y una curva con dos tangentes distintas en dicho punto múltiple. La curva se denomina curva de Lissajous¹⁷⁹:

¹⁷⁹ Esta curva está asociada al estudio del movimiento vibratorio.

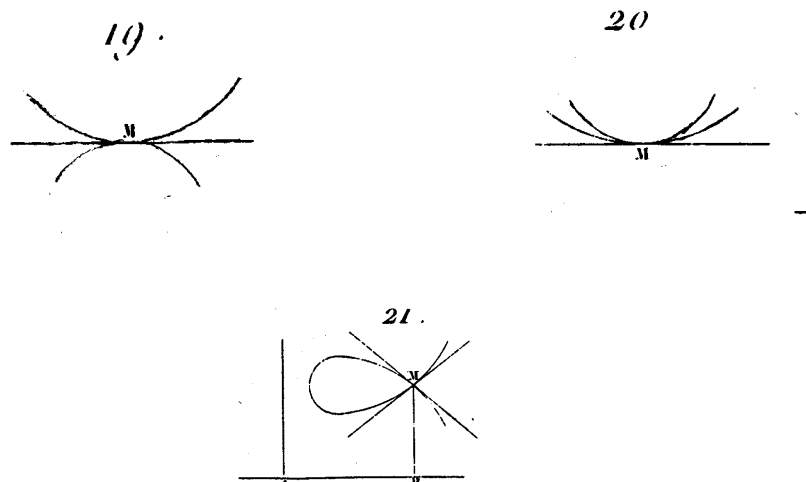


Fig. 3.45. Puntos múltiples

El último tipo de puntos que se han considerado son los puntos conjugados, que son puntos que aparecen aislados en la curva, para los que el coeficiente diferencial es una indeterminación. Lacroix propone como ejemplo la curva dada por la ecuación

$y = \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x-c)}{a}}$ representada mediante la gráfica 23 (fig. 3.46), para la cual cuando $c=0$, la parte AF queda reducida al punto A (gráfica 22, fig. 3.46), cuando $b=0$ obtenemos la figura 3.46 (24), y si $b=0$ y $c=0$, se obtiene la gráfica 25 (fig. 3.46):

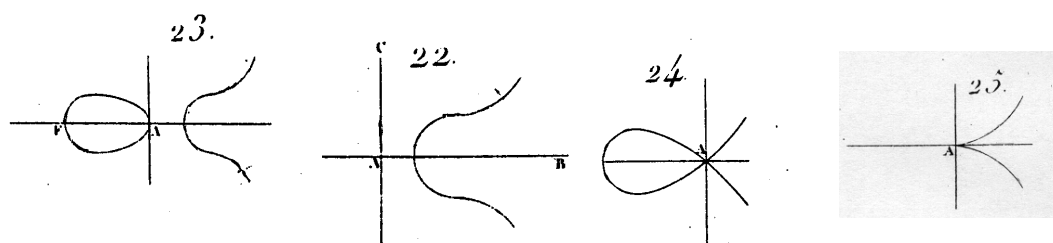


Fig. 3. 46 Gráfica de la función $y = \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x-c)}{a}}$ para distintos valores de a, b, c.

Por, último incluimos las gráfica de una función para la que se realiza un estudio gráfico (**g**) identificando cortes con los ejes, puntos críticos, asíntotas o ramas infinitas, puntos múltiples, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad,... Dicha curva que se conoce como curva de Cramer del diablo, tiene la gráfica siguiente:

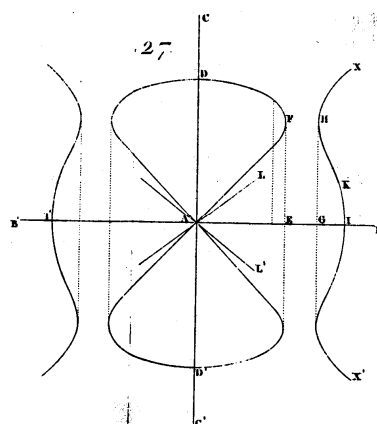


Fig. 3.47. Curva del diablo

En concreto, al realizar el análisis de la curva se calculan el máximo y mínimo relativos, así como los puntos de inflexión correspondientes a las distintas ramas de la curva.

3.7.4.3- Expresiones simbólicas.

La primera característica identificativa del cálculo diferencial desarrollado por Lacroix, es la utilización de las diferenciales a pesar de la aproximación realizada anteriormente en el libro de Lagrange mediante las derivadas. Se produce por tanto una vuelta a la concepción leibniziana de la variación y a su notación (**e**). Además, se considera y se distingue entre las diferenciales de las variables y el cociente entre dichas diferenciales, que denomina, como hemos visto anteriormente, coeficiente diferencial.

Una gran parte de las funciones utilizadas por Lacroix se hace de forma general, utilizando el símbolo y para identificarlas. Se distingue cuando se hace referencia a la función o bien al valor de dicha función en los puntos singulares, ya que estos se denominan utilizando la letra u (para la ordenada) indicando que, cuando se hace el desarrollo de la función en dicho punto a la derecha, se utiliza u' y a la izquierda u .

Otra gran parte de funciones son familias de funciones en las que se utilizan uno, dos o más parámetros, algunos de ellos van tomando diferentes valores para distinguir las diferentes posibilidades. Todas ellas son funciones algebraicas (aunque en el libro hay secciones especialmente dedicadas a las funciones trascendentes), como en el ejemplo que toma para desarrollar los distintos tipos de singularidades:

$$y = b + c(x - a)^m \quad (\text{p. 96})$$

Considera diferentes casos según sea el exponente entero o fraccionario, y en este último caso, según sea la fracción mayor o menor que 1 (en cuyo caso se propone una

función de y en lugar de x y se aplican los resultados obtenidos por simetría respecto los ejes de coordenadas), con numerador y denominador de la misma o de distinta paridad, para ello propone los ejemplos siguientes:

$$y = b - c(x-a)^{\frac{2}{3}} \text{ (p. 99); } y = b \pm c(x-a)^{\frac{3}{4}} \text{ (p. 99); } y = b + c(x-a)^{\frac{3}{5}} \text{ (p.100)}$$

$$x = a + \frac{1}{c}(y-b)^{\frac{1}{m}} \text{ (p. 100)}$$

Destacan los casos de funciones cuya expresión contenía raíces con el radical par, en cuyo caso se utiliza en la misma función el valor positivo y el valor negativo, con lo que la curva tiene dos ramas y a cada abcisa le corresponden dos ordenadas.

Los casos de puntos múltiples surgen en el libro de Lacroix a partir de funciones cuyas ecuaciones toman la forma siguiente:

$$y = b \pm (x-a)\sqrt{x-c} \text{ (p. 102); } y = b + (x-a)^m\sqrt{x-c} \text{ (p. 102)}$$

Y para los puntos conjugados:

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0 \text{ (p. 103); } ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0 \text{ (p. 103);}$$

$$y = (x-a)^m(x-b)^{\frac{2n+1}{2}} \text{ (p. 104); } \begin{aligned} (y-b)^2 - (x-a) &= 0 \\ (y-b)^3 - (x-a)^2 &= 0 \end{aligned} \text{ (p. 105)}$$

Las aplicaciones están relacionadas tanto con funciones cuya expresión algebraica viene determinada de forma explícita como aquellas en las que se da en forma implícita.

$$u = x^m(x-a)^n \text{ (p. 121); } y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0 \text{ (p. 122)}$$

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0 \text{ (p. 124)}$$

Aunque también se utilizan funciones particulares como es el caso de:

$$(y-x^2)^2 = x^5 \text{ (p.101)}$$

3.7.5. Conclusiones.

3.7.5.1.- Análisis socio-cultural.

- CIA1: La obra de Lacroix fue escrita en un momento en el que se consideraba de vital importancia la elaboración de buenos libros de texto para la reforma del sistema educativo francés. Se pretendía establecer un método que permitiera el

control y uniformización del sistema de enseñanza y esta obra contribuyó a la construcción de la matemática escolar no sólo en Francia sino en otros países europeos.

- CIA2: Lacroix fue un matemático que en su época era considerado de rango menor y con escasa influencia. Sin embargo, se consideró su impacto en la ciencia través de la difusión del saber con sus libros de texto.
- CIA5: Escribió libros de texto para casi todas las ramas de las matemáticas y todos los niveles educativos.
- CEM1: Los contenidos están estructurados de forma que se presenta el cálculo diferencial como un campo conceptual, mediante una secuencia de conocimientos ordenados y bien definidos, que comienza a partir de los elementos básicos. Para ello se recopilaron todos los resultados originales que estaban desperdigados en diversas publicaciones, se elementarizaron y se estructuran para dotarlos de coherencia interna.
- d: Las aplicaciones son escasas, hay un mayor énfasis en la estructuración teórica que en las posibles aplicaciones que se puedan derivar de ella o en las ejemplificaciones que podrían ayudar a la comprensión de los conceptos. Los ejemplos son puramente matemáticos, resaltando las aplicaciones aritméticos y las puramente algebraicas.

3.7.5.2.- Análisis epistemológico.

- CIA2: El entorno en el que se movió Lacroix, en las diferentes escuelas y facultades en las que fue profesor, le permitió mantenerse en contacto con los principales matemáticos de la época y estar al tanto de los descubrimientos y avances más recientes en relación con el Cálculo Diferencial. Además contribuyó a la formación de muchos de estos matemáticos.
- CIA4: Las innovaciones que se introdujeron a través de esta obra están fundamentalmente relacionadas con la elementarización de los conceptos y la forma de estructurar los contenidos para dotarles de coherencia interna.
- CEM3: El libro se divide en dos partes, la primera esta dedicada al Cálculo Diferencial, y en ella se recogen prácticamente todos los conceptos relativos a esta rama de las matemáticas. Trata, por lo tanto, la definición de diferencial, la de cociente diferencial, el cálculo de diferenciales de funciones sencillas, las reglas del cálculo del diferencial en relación con las operaciones algebraicas entre funciones, las diferenciales sucesivas, la diferenciación de funciones trascendentes, el estudio de funciones de dos o más variables, el estudio de curvas, el estudio de los puntos singulares de las curvas, el teorema de l'Hôpital,...

- d: La definición que da Lacroix de puntos singulares es de tipo gráfico, asociando dichos puntos con un determinado comportamiento de la curva. A partir de esta definición, se clasifican los distintos puntos de una forma gráfica: si tienen tangente horizontal o vertical, si cambian la convexidad de la curva, si dividen la curva en dos ramas,... Pero también se hace una clasificación de tipo algebraico. A partir de la ecuación de una curva se van analizando las diferentes posibilidades según la variación de los parámetros de la curva. Se trata, por lo tanto, de un estudio de tipo gráfico-analítico en el que el objetivo es la clasificación de los puntos singulares.
- e: Entre las expresiones simbólicas hemos encontrado algunas implícitas y otras explícitas. La mayoría son algebraicas, pero también son importantes las que continen radicales y exponentes fraccionarios.

3.7.5.3.- *Análisis didáctico.*

- CIA3: El objetivo general de Lacroix de crear un cuerpo coherente para las matemáticas escolares desde secundaria hasta la educación superior, también lo aplicó a este libro.
- CEM2: El libro está dividido en dos partes, una dedicada al cálculo diferencial y la otra al cálculo integral, siendo el enfoque que dio al contenido fundamentalmente teórico.
- CEM4: La impresión del libro es muy similar a los otros analizados.
- d: Aunque la definición de máximos y mínimos hace alusión al valor de estos puntos, y sugiere un enfoque de tipo aritmético, ya hemos comentado que el resto del libro está dirigido hacia la clasificación de los puntos singulares desde un punto de vista gráfico-analítico.
- g: Las gráficas son ideogramas, es decir, esquemas para identificar las características de los puntos singulares. Como dichos puntos los ha clasificado desde un punto de vista gráfico, se incluye una de estas gráficas para cada tipo de puntos. Además se incluye alguna de las curvas clásicas, como la de Lissajous o la del diablo, que se pueden considerar curvas frecuentemente estudiadas en aquella época.

3.8.- CONCLUSIONES.

En cuanto a la estructura de los libros:

Algunos de los libros analizados presentan la estructura clásica establecida por los griegos para los libros de matemáticas, sin ninguna consideración en cuanto que han de ser utilizados como libros de texto, tal es el caso de los libros de l'Hôpital y MacLaurin. En ellos a partir de unos conceptos iniciales que consituyen la base sobre la que se van a construir posteriormente los demás conceptos así como sus propiedades, estructura y reglas de cálculo. La única novedad la constituyen algunos ejemplos o problemas resueltos que se utilizan con el fin de ejemplificar la exposición desarrollada con anterioridad. En el libro de Euler, se utiliza para desarrollar los conceptos del Análisis una estructura muy elaborada, en la que, a partir de una serie de definiciones se va desarrollando toda la teoría, analizando los diferentes casos que se pueden dar y clasificándolos de acuerdo a características de tipo algebraico. Tiene una estructura matemática muy moderna, en el sentido de que se dan los conceptos iniciales y a partir de ellos se construye su clasificación, con lo que se rompe con la tradición establecida desde los griegos. Esta misma idea o concepción del Análisis podemos encontrarla en el libro de Lagrange, en el que lo que se pretende es fundamentar los conceptos del Cálculo y dotarles de una estructura algebraica fuerte, mientras que los aspectos de tipo más didáctico, son dejados a un lado. El énfasis está puesto en la organización de los conceptos desde un punto de vista totalmente matemático que no deje lugar a dudas en cuanto a su consistencia científica. En cambio, los libros de Bézout, Bails y Lacroix tienen una estructura más didáctica, en el sentido de que se pueden identificar con los manuales o enciclopedias de la época, de hecho estos libros, precisamente por esta estructura, fueron de los que más ediciones se publicaron, y se recomendaron para su utilización en las escuelas politécnicas y en las Academias militares.

En cuanto a la concepción del Cálculo Diferencial que se presenta:

Hay un grupo de matemáticos que toman como punto de partida la noción de diferencia, considerando las curvas como formadas por segmentos rectilíneos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva. Se tiene una visión esencialmente geométrico-dinámica del Análisis, ya que se consideran que estas partes infinitesimales de las curvas aumentan o disminuyen de forma continua, las proposiciones se formulan en un lenguaje geométrico, y las demostraciones se basan en elementos y consideraciones de tipo geométrico, además se establecen definiciones a partir de objetos geométricos y del cambio que experimentan estos objetos al recorrer las curvas, como es el caso de la utilización de la subtangente o de la normal para la definición de los puntos extremos. Hay que destacar la visión de MacLaurin heredera de los métodos utilizados por Newton, en el que las variables son consideradas como entidades físicas que sufren un movimiento, y su estudio como la variación en función del tiempo.

Otros se fijan, como hemos dicho, más bien en los aspectos algebraicos, procurando dotar de una estructura coherente y consistente a los conceptos, y procurando realizar una clasificación exhaustiva de los conceptos relativos a los puntos críticos, relacionándolos

con las ecuaciones algebraicas correspondientes a las curvas. Entre estos se encuentra Euler, que sigue fundamentando el Cálculo en el concepto de diferencial, y Lagrange, que busca una fundamentación estrictamente algebraica mediante la consideración del concepto de función derivada y la noción de función analítica como su desarrollo en serie de potencias.

Por último, en los libros de Bézout, Bails y Lacroix, el énfasis está puesto en establecer los métodos de cálculo de los puntos críticos, utilizándose para ello el cociente diferencial aunque como cociente algebraico, en el sentido de que tanto el numerador como el denominador tienen entidad propia y se opera con ellos como si de un cociente algebraico se tratara. En el último de estos libros, se hace además una clasificación de los diferentes tipos de puntos que es la más amplia de las que se han realizado en los libros históricos de texto, distinguiendo entre puntos máximos, mínimos, de inflexión, de primera y de segunda especie, puntos simples y múltiples y puntos conjugados, distinguiéndolos por su representación gráfica y por los métodos de cálculo más adecuados a cada uno de ellos.

Muchos de los conceptos que se estudiaban en el Análisis Matemático han desaparecido prácticamente como objeto de estudio incluso en las universidades, como es el caso de las evolutas y las envolventes, los círculos osculadores,... cuyo análisis ocupaba capítulos enteros en estos libros de texto.

En cuanto a los sistemas de representación utilizados, podemos destacar tres periodos:

Inicialmente se utilizan de forma prioritaria las descripciones de tipo geométrico, manteniendo el tipo de problemas que se intentaban resolver desde la época griega. Esto influye, asimismo, en las representaciones gráficas, en las que se hace más énfasis en la curva que en la función que representa, dichas curvas son clásicas como la espiral logarítmica, el Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile. Dado que el estudio se hace desde un punto de vista geométrico y mediante el estudio de determinadas curvas, los puntos críticos se clasifican en máximos, mínimos, puntos de inflexión y puntos de retroceso, y se consideran los casos tanto en los que la tangente es horizontal como vertical, es decir, se consideran tanto funciones derivables como aquellas que no lo son, mientras que actualmente el estudio en educación secundaria, se realiza exclusivamente en relación con las primeras. Es decir, a partir de la forma de la curva, se clasifican los puntos críticos, y la curva se construye como un esbozo de parte de su representación, sin tener muchas veces en cuenta la fidelidad y exactitud de dicha representación. Muchas de estas consideraciones han desaparecido en los libros de texto actuales, como la consideración de los puntos de retroceso o los puntos en los que la tangente es vertical, ya que se utiliza otro tipo de curvas más “preparadas” en cuanto a su orientación didáctica, para las que este tipo de puntos “singulares” no tienen cabida. También los términos utilizados en relación con la representación gráfica de las funciones ha variado desde entonces, desde la utilización de *coupée* y *apliquée* hasta los actuales abscisa y ordenada, que son lingüísticamente diferentes y también matemáticamente, ya que entonces se consideraban como líneas, mientras que actualmente se asocian a las coordenadas de un punto, su valor.

En los libros de Euler y Lagrange el tipo de representación predominante es la simbólica, de hecho en ninguno de los dos libros hemos encontrado representaciones gráficas, las curvas han pasado a ocupar un lugar secundario. Incluso las descripciones son prácticamente enunciados en los que se incluye la expresión simbólica de la función que se pretende estudiar. En definitiva, la ecuación algebraica de la función es el centro de atención en el desarrollo del discurso.

En cuanto a los libros de Bézout, Bails y Lacroix, podemos observar un equilibrio entre el uso de expresiones de tipo simbólico y aquellas de tipo más gráfico, se intenta compensar la mayor precisión de las expresiones de tipo simbólico con la ayuda gráfica que proporciona la representación mediante ejes cartesianos de las funciones. A pesar de ello, la representación gráfica no recupera el papel que tiene en los dos primeros libros analizados, sirviendo sólo de apoyo a los razonamientos y de visualización de los conceptos, es decir, se utiliza más como una herramienta didáctica que como un objeto de estudio.

Hemos pasado de la consideración de las curvas, a sus expresiones simbólicas y a la complementación de éstas con las representaciones gráficas, de tal forma que podemos observar cierto paralelismo con las distintas concepciones que hemos descrito acerca del Análisis Matemático.

En cuanto al papel que cumplen las representaciones:

Las descripciones se utilizan tanto para definir los conceptos como para presentar algunos problemas que permiten resolver estos conceptos, aunque el tipo de problemas que se plantean de unos libros a otros es muy distinto. Así en los libros de l'Hôpital y MacLaurin el tipo de problemas y descripciones son geométricos, de hecho en ellos se dice "dada la naturaleza de una curva ...", también hay alguno relacionado con temas de Física, como el correspondiente a la refracción de la luz, o el relativo al estudio del ocaso. En cambio en el libro de Euler son exclusivamente algebraicos, y en los libros de Bézout y Bails se incluyen problemas de distinto tipo, desde los geométricos hasta alguno de carácter aritmético. Todos los problemas son genéricos en el sentido de que no se plantean datos particulares en ninguno de ellos y se obtienen toda una familia de soluciones que dependen de diferentes parámetros; son también muy característicos de los libros históricos de texto, los problema de tipo demostración en los que la solución ya se establece en el enunciado del problema.

En cuanto a la utilización de las representaciones tabulares ya hemos visto que en ninguno de los libros de texto analizados se ha encontrado ninguna de estas representaciones, y que, aunque sí se utiliza en los actuales libros de texto, mantienen un papel secundario en función de cualquiera de las otros tres tipos de representaciones.

Las gráficas se utilizan fundamentalmente para visualizar los conceptos, servir de apoyo y guía en el desarrollo de las demostraciones y para establecer claves en cuanto al cálculo de los puntos críticos. De todas formas hemos de destacar la consideración en el libro de l'Hôpital de dos tipos de curvas, unas definidas y construídas a partir de un eje, y otras en las que el elemento básico para su construcción es un único punto que recuerdan la representación de funciones en coordenadas polares. Este último tipo de curvas han

desaparecido totalmente de los libros de texto, siendo este libro el único en el que las hemos encontrado. Otras curvas se construyen a partir de otras como son las roulette o la espiral logarítmica, incluso a partir de los datos de un problema, como la que corresponde al área lateral de un cono que se dibuja a partir de éste o la que representa la refracción de la luz, que se va construyendo a partir de un dibujo correspondiente a la situación física. También debemos mencionar algunas de las gráficas que hemos incluido correspondientes al libro de MacLaurin, en las que además de realizar el trazo de la gráfica de la curva, se incluye el de la curva correspondiente a la derivada, lo que permite establecer una comparación entre ambas en lo que se refiere a los puntos críticos, permitiendo asociar las características de las gráficas y la definición que se ha dado de los diferentes tipos de puntos.

Las expresiones simbólicas son de tipo general, en el sentido de que representan toda una familia de funciones y no una sólo, con lo que se consideran como clases de equivalencia en las que se mantiene un comportamiento similar, y el estudio que se hace es relativo a la relación que hay entre los parámetros que están incluidos en dichas expresiones. Aunque la mayoría son algebraicas, hay muchas de ellas que corresponde a funciones irracionales, que no están definidas en todo el conjunto de los números reales o que no son derivables en todos los puntos, con lo que se abarcan numerosas situaciones diferentes que no se contemplan en los libros de texto actuales. Se utilizan como símbolos de las variables indistintamente x o y , variando muchas veces el papel de cada una de ellas, con lo que, por ejemplo, en el libro de MacLaurin se hace un estudio simétrico respecto de cada una de ellas, con lo cual se consideran puntos extremos en relación con cada una de las variables. En cuanto al tipo de expresiones utilizadas por Lagrange y que justifican la nomenclatura utilizada en el cálculo diferencial e integral, en relación con los términos función derivada y función primitiva, ha desaparecido totalmente en la actualidad. Los desarrollos en serie no se incluyen, salvo casos muy aislados, y los cursos superiores (C.O.U.) en los libros de texto de educación secundaria. El efecto que se consigue mediante la utilización de estas series, es el de considerar la función desde un punto de vista más dinámico, en el sentido de que su expresión representa la forma en que va variando en función del tiempo. Este tipo de representaciones, que se utilizaron para justificar y asegurar la validez de los métodos utilizados en el Análisis Matemático, sólo se han utilizado en este libro.

Podemos asegurar que cada uno de los libros analizados es único en alguno de los aspectos expuestos: en cuanto a la concepción del análisis, las representaciones utilizadas, el tipo de problemas analizados,... estando fuertemente influenciados unos aspectos por otros. Así cuando la concepción es de tipo geométrico, las representaciones tanto gráficas como simbólicas o verbales reflejan esta concepción. Lo mismo se puede decir de la concepción de tipo más algebraico reflejada en los libros de Euler y Lagrange, en los que la representación más usada es la simbólica, y las funciones son de tipo algebraico. Y por último tenemos una visión de tipo gráfico-aritmética, en la que se utiliza la visualización de los conceptos mediante gráficas cartesianas y su definición mediante descripciones en las que se enfatiza el valor de la función en el punto, asociando ambos tipos de representación.

